



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH

Institut für Reaktorwerkstoffe

**Berechnung von Kriechverformungen
unter strikter Einhaltung
kontinuums-mechanischer
Gleichgewichtsbedingungen**

von

H. Cords

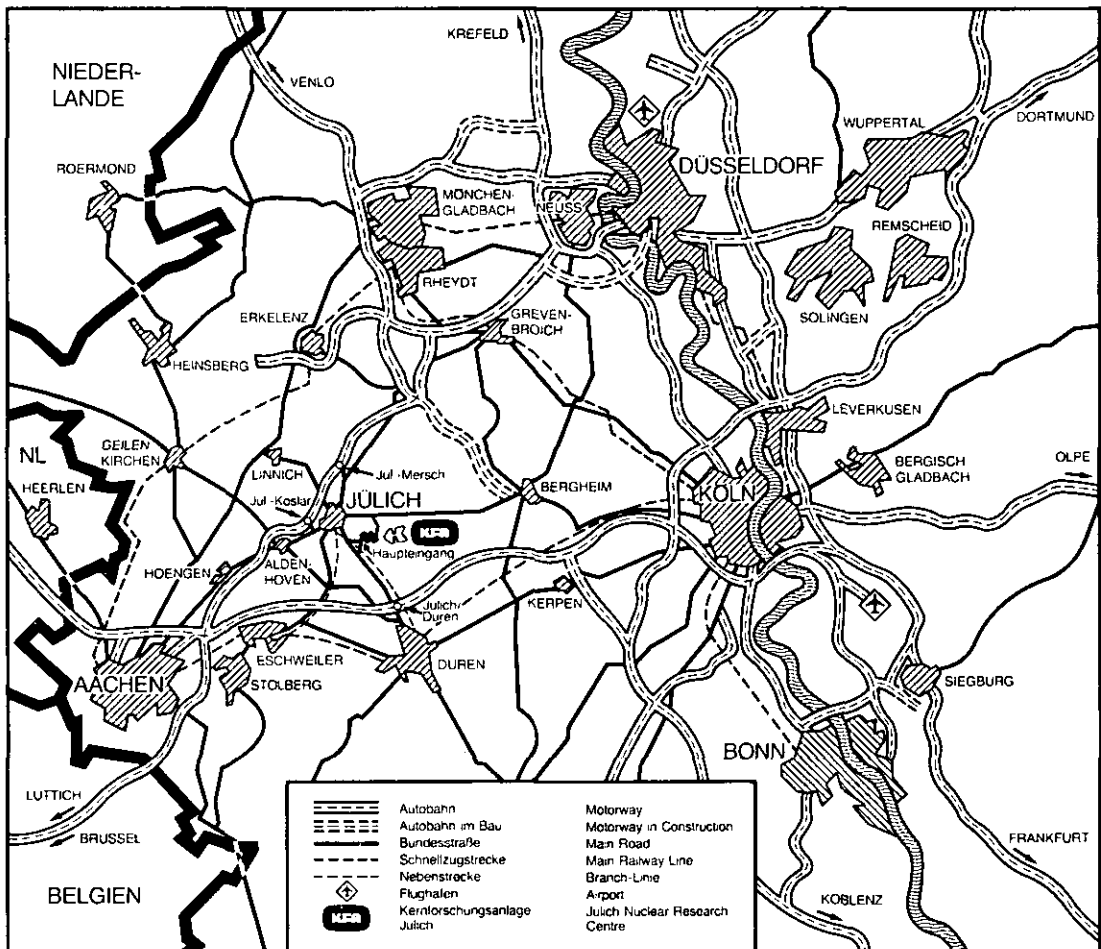
G. Kleist

R. Zimmermann

Jül-Spez-321

Juli 1985

ISSN 0343-7639



Als Manuskript gedruckt

Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 321

Institut für Reaktorwerkstoffe Jül – Spez – 321

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 02461/610 · Telex: 833556-0 kf d

**Berechnung von Kriechverformungen
unter strikter Einhaltung
kontinuums-mechanischer
Gleichgewichtsbedingungen**

von

H. Cords

G. Kleist

R. Zimmermann

BERECHNUNG VON KRIECHVERFORMUNGEN UNTER STRIKTER EINHALTUNG KONTINUUMS-MECHANISCHER GLEICHGEWICHTSBEGINGUNGEN

von
H. Cords
G. Kleist
R. Zimmermann

KURZFASSUNG

Die Berechnung der Kriechverformungen eines Körpers unter Belastung erfolgt üblicherweise durch schrittweise Einbringung von Kriechdehnungen, so wie sie aufgrund eines vorgebbaren Kriechgesetzes berechnet werden. Das Kräftegleichgewicht im Körper wird pro Zeitschritt verletzt und am Ende des Zeitschritts zwar korrigiert, aber nur unvollständig.

Im vorliegenden Papier wird gezeigt, daß die bekannten Instabilitätsprobleme von Finite-Element-Rechnungen in ursächlichem Zusammenhang mit der zwangsweisen Einbringung von Kriechdehnungen stehen. Es wird deshalb ein Verfahren zur zwangsfreien Einbringung der Kriechdehnungen beschrieben und untersucht. Die durch Kriechen verursachte Spannungsrelaxation wird im Verfahren zwangsfreier Kriechdehnungen als unabhängige Relaxation behandelt. Am Beispiel des dickwandigen Rohrs unter thermischer Belastung sowie unter gleichzeitigem Innen- und Außendruck wird gezeigt, daß die beiden genannten Berechnungsverfahren unterschiedliche Ergebnisse liefern.

In einem weiteren Anwendungsbeispiel werden die Kriecheigenschaften einer zylindrischen Kerbzugprobe untersucht. Wichtigstes Ergebnis der Rechnung ist, daß die hier berechnete Probe sich im Kerbquerschnitt im Zustand des stationären Kriechens nicht einschnürt, was als Ursache für die kriechverfestigenden Eigenschaften dieses Probentyps gewertet werden kann. Der Vergleich mit einem entsprechenden Experiment bestätigt die berechneten Verformungseigenschaften bei Versuchsbeginn. Eine Extrapolation dieser anfänglichen Verformungseigenschaften auf der Basis eines stationären Kriechens über eine große Versuchsdauer würde jedoch das Ausmaß der Probenverformung am Kerb unterschätzen.

CALCULATION OF CREEP DEFORMATIONS UNDER RIGOROUS APPLICATION OF THE CONTINUUM-MECHANICAL EQUILIBRIUM CONDITIONS

by
H. Cords
G. Kleist
R. Zimmermann

ABSTRACT

The creep deformations of a body under mechanical load is usually being calculated by an incremental process causing stress redistribution. Creep strains calculated from a given creep law are imposed onto the body in a restraining manner. Although the restraining is corrected for after each time step in order to restore the equilibrium of forces, correction cannot be achieved completely.

In the present paper it is shown that the well-known instability problems of Finite-Element creep calculations are caused by residual restraining. A numerical method to impose creep strains without restraints is described and examined. The two methods have been used to calculate stress relaxation in a thick walled tube under both thermal load and internal as well as external pressure. The results for stress relaxation which in the case of unrestraining creep strains is treated as an independent relaxation process proves to be different for the two methods.

In a second application the creep properties of a circumferentially notched bar under uniform tension has been investigated. The calculations show that in the state of stationary creep the minimum cross section retains its diameter, which is a statement depending on the very circumstances chosen. Experimental results confirm this property as far as the initial change of the specimens shape is concerned. However, a long-time extrapolation of the results on a steady-state creep basis would underestimate the creep deformations of the specimen at the notch.

INHALTSVERZEICHNIS

1.	Einleitung	1
2.	Verletzung des Kräftegleichgewichts	3
3.	Prinzipielle Betrachtungen zur Behandlung des Problems	6
4.	Anwendung der verschärften Gleichgewichtsbedingung	9
5.	Problematik der Spannungsrelaxation	15
5.1	Definition der Relaxationsgleichungen	15
5.1.1	Reine Spannungsrelaxation	16
5.1.2	Reine Dehnungsrelaxation	17
5.1.3	Modell einer Spannungs-Dehnungsrelaxation	18
5.2	Eigenschaften der Relaxationsgleichungen	20
5.2.1	Die Prandtl-Reuss Gleichungen der Elasto-Plastischen Theorie	20
5.2.2	Alternative Möglichkeit zur Beschreibung der Spannungsrelaxation	22
6.	Testrechnungen zur Spannungsrelaxation am dickwandigen Rohr	24
7.	Finite-Element-Rechnungen an einer gekerbten, zylindrischen Probe	28
7.1	Einleitung	28
7.2	Spezifikationen	28
7.3	Verformungseigenschaften der Kerbzugprobe	29
7.4	Dehnungseigenschaften der Kerbzugprobe	30
7.5	Vergleich mit Experimentdaten	31
7.6	Diskussion erforderlicher Folgerechnungen	32
8.	Zusammenfassung	35
8.1	Theoretische Ansätze	35
8.2	Rechnungen am dickwandigen Rohr	36
8.3	Gekerbte Zugprobe	36
	Literaturverzeichnis	39
Anhang A	Berechnung von Gesamtdehnraten und Spannungsumlagerungsraten am dickwandigen Rohr unter den Bedingungen des Kräftegleichgewichts und der Kompatibilität	41
Anhang B	Kritische Einwände zu dem in dem Bericht dargestellten Konzept und deren Diskussion durch die Autoren	47
B I.	Kritische Einwände zu dem dargestellten Konzept	47
B II.	Diskussion der Kritikpunkte durch die Autoren	50

1. EINLEITUNG

Bei der Durchführung rein elastischer Rechnungen ist die Gewährleistung eines Kräftegleichgewichts und die Einhaltung von Kompatibilitätsbeziehungen¹ eine grundlegende Voraussetzung. Sind neben den elastischen Eigenschaften des Körpers auch plastische Eigenschaften zu berücksichtigen, so führt das im allgemeinen zu einer schrittweisen Berechnungsmethode, bei der die Gleichgewichtsbedingung nicht vollständig eingehalten werden kann. Nach Beendigung eines jeden Zeitschritts wird daher eine Nachkorrektur des Kräftegleichgewichts empfohlen².

Es ist von Interesse darzulegen, welchen Einfluß die strikte Anwendung des Kräftegleichgewichts auf Rechenergebnisse haben kann. Die Aufgabenstellung zu der vorliegenden Arbeit war daher die Berechnung der Verformungseigenschaften und Spannungsänderungen unter Anwendung verschärfter Gleichgewichtsbedingungen an zwei Beispielen; nämlich dem dickwandigen Rohr unter Innendruck und gleichzeitiger thermischer Belastung sowie einer zylindrischen Zugprobe mit umlaufender Kerbe. Das Gleichgewichtsproblem besteht unter stationären Einflußbedingungen nur in einer Phase zu Beginn des Kriechvorgangs, in der die durch die anfängliche Belastung gegebene Spannungsverteilung in eine andere, stationäre Spannungsverteilung übergeht. Da die Änderung des Spannungszustands u.a. durch die Bauteilform bedingt ist, nicht aber z.B. durch materialbedingtes primäres Kriechen, so soll einem Vorschlag von F.K.G. Odquist³ folgend diese Form des Übergangskriechens im Gegensatz zum Primärkriechen als transientes Kriechen bezeichnet werden.

Im bestehenden Rechenverfahren (siehe z.B. Ref²) werden die aufgrund eines gegebenen Spannungszustandes in kleinen Zeitschritten berechneten Kriechdehnungsinkremente in Form von sogenannten Anfangsdehnungen in den Körper eingebracht, die elastische Reaktion des Körpers berechnet und als solche dem jeweils bestehenden Spannungszustand iterativ superponiert. Die Forderung nach einer strikten Einhaltung des Kräftegleichgewichts zwingt zu einem Überdenken des Rechenverfahrens und zur Einführung einer abgeänderten Berechnungsmethode. Deren Anwendung auf die gekerbte, zylindrische Zugprobe, die wegen ihrer kriechverfestigenden Eigenschaft ein noch nicht vollständig geklärtes Problem darstellt, liefert aufschlußreiche Ergebnisse.

In den nachfolgenden Abschnitten wird zunächst verdeutlicht, was unter einer Verletzung des Kräftegleichgewichts bei der herkömmlichen Rechenmethode verstanden werden soll, und welche Konsequenzen daraus folgen. Es wird dann ein Verfahren beschrieben, in dem die speziellen Gleichgewichtsbedingungen für Kriechdehnungen berücksichtigt werden können, wobei zusätzlich der Vorgang der Spannungsrelaxation kritisch betrachtet wird. Die Testrechnungen am dickwandigen Rohr sollen zeigen, welchen numerischen Einfluß die konsequente Berücksichtigung der Gleichgewichtsbedingung ausübt. Die Kerbzugprobe stellt ein Beispiel mit extremen physikalischen Bedingungen dar; d.h. ein dreiachsiger Belastungszustand und Spannungskonzentrationen existieren gleichzeitig nebeneinander. In diesem

Fälle werden experimentell bestimmte Verformungseigenschaften mit Rechen-
ergebnissen verglichen.

Ferner wird an dieser Stelle auf den Anhang B hingewiesen, in dem die Er-
gebnisse einer Diskussion zu dem in der vorliegenden Arbeit behandelten
Thema schriftlich ausgeführt sind. In diesem Anhang sind zusätzliche Ge-
sichtspunkte dargelegt, die zur Unterstützung des Gesamtkonzepts beitra-
gen sollen.

2. VERLETZUNG DES KRÄFTEGLEICHGEWICHTS

Das üblicherweise angewandte, inkrementale Berechnungsverfahren bei visko-plastischen Problemen² wird hier als bekannt vorausgesetzt. Eine grundlegende Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens ist die Annahme, daß sich elastische Dehnungen ϵ^{el} und andersartige Dehnungen ϵ zu Gesamtdehnungen ϵ^{tot} addieren lassen. Eine entsprechende Beziehung gilt für die abgeleiteten Größen, die Dehnraten:

$$\dot{\epsilon}^{tot} = \dot{\epsilon}^{el} + \dot{\epsilon} \quad (1)$$

Unter Verwendung des Hook'schen Gesetzes in der Form

$$\dot{\sigma} = D \dot{\epsilon}^{el} \quad (2)$$

mit der Elastizitätsmatrix D (siehe Gl. A1) läßt sich Gl. (1) umschreiben, so daß eine Spannungsänderungsrate explizit ausgedrückt werden kann:

$$\dot{\sigma} = D (\dot{\epsilon}^{tot} - \dot{\epsilon}(\sigma)) \quad (3)$$

In der Praxis der Finite-Element-Rechnungen ist es bei Verwendung der sogenannten Anfangsdehnungsmethode (englisch: initial strain method) üblich, für $\dot{\epsilon}$ entweder thermische und/oder auch Kriechdehnraten einzusetzen.

Einfache und klare Verhältnisse liegen vor, wenn es sich bei den Dehnraten $\dot{\epsilon}$ um thermische Dehnraten $\dot{\epsilon} = \alpha \cdot (\partial T / \partial t)$ handelt, die sich als Produkt aus einem thermischen Ausdehnungskoeffizienten α und einer Temperaturänderungsrate $\partial T / \partial t$ berechnen lassen. Diese Dehnraten können u.a. bei kontinuierlicher Aufheizung auch schrittweise als Dehnungsinkremente berücksichtigt werden. Bei jedem Zeitschritt wird auf Einhaltung des Kräftegleichgewichts und auf Kompatibilität geprüft und diese Prüfung liefert gleichzeitig ein vom Körper ausgeführtes Gesamtdehnungsinkrement $\Delta \epsilon^{tot}$ und einen Zuwachs an thermischer Spannung $\Delta \sigma$. Die Spannungen $\Delta \sigma$ entstehen als elastische Reaktion des Körpers auf die thermischen Dehnungen, die in diesem Sinne *zwangsweise* in den Körper eingebracht wurden.

Während daher thermische Dehnungen erzwungen werden, so daß die resultierenden Spannungen den Körper unter Umständen bersten lassen, ist das bei Kriechdehnungen nicht der Fall. Kriechdehnungen entstehen nur dann, wenn bereits Spannungen vorhanden sind. Sie führen nicht wie thermische Dehnungen zum Aufbau von Spannungen, sondern erlauben deren Relaxation. Wenn daher für $\dot{\epsilon}$ in Gl. (3) aufgrund einer beliebigen Vorschrift (z.B. des Norton'schen Kriechgesetzes) Kriechdehnraten eingesetzt werden und nach dem gleichen, oben beschriebenen Verfahren für Thermospannungsprobleme

Spannungsänderungsraten berechnet werden, so werden ungerechtfertigterweise Kriechdehnraten *zwangsweise* in den Körper eingebracht, und man erhält dann ganz analog als elastische Reaktion des Körpers real nicht existierende Gegenspannungen. Sie werden in Durchführung des Iterationsverfahrens dazu verwendet, um die anfänglich gegebene Spannungsverteilung im Körper umzuverteilen. Es wäre falsch, die so errechneten Spannungsänderungen als Spannungsrelaxation zu interpretieren. Da außerdem Kriechdehnungen nicht wie durch Temperaturbelastung bedingte, thermische Dehnungen erzwungen werden können, das herkömmliche Rechenverfahren dieses aber implizit unterstellt, so kann in diesen Rechnungen das Kräftegleichgewicht im Körper unter Kriechbedingungen auch nicht eingehalten werden.

Die vorliegende Arbeit wurde daher unter die folgende Prämisse gestellt:

-Es kann zu keinem Zeitpunkt und an keiner Stelle des Körpers zugelassen werden, daß Kriechdehnungen ϵ entsprechend der Gl. (3) zur zusätzlichen Erzeugung von Spannungen σ dienen.

Das führt zu einer Neuformulierung der Gleichgewichtsbedingung für Kriechen, die wir im folgenden als *verschärfte Gleichgewichtsbedingung* bezeichnen wollen und deren Anwendung untersucht werden soll.

Untersucht man zunächst einmal den Ablauf einer Rechnung, bei der Kriechdehnungen wie bisher wie thermische Dehnungen zwangsweise ausgeführt werden, so ergibt das einen Vorgang, der einer Relaxation ähnlich ist. Gemäß dieser Rechnung erzeugt die elastische Reaktion des Körpers eine negative Spannungsänderungsrate dort, wo die Kriechdehnrate am höchsten ist, und sie erzeugt eine positive Spannungsänderungsrate dort, wo die Kriechdehnrate am niedrigsten ist. Das ist ganz analog der Berechnung von Thermospannungen, wobei Druckspannungen in Körperbereichen mit hoher Temperatur und Zugspannungen in Körperbereichen mit relativ niedriger Temperatur entstehen. Da *negative Spannungsänderungsraten* die Spannungen und damit auch die Kriechdehnraten mindern und *positive Spannungsänderungsraten* sie entsprechend erhöhen, so wird nach einiger Zeit ein stationärer Zustand der Spannung erreicht, der dann ein spannungsloser Zustand wäre, wenn der Körper nicht gleichzeitig durch äußere Lasten beeinflusst wird. Der Vorgang ist in der Tat, abgesehen von einer Detaileigenschaft, die im folgenden erläutert werden soll, qualitativ einer Relaxation sehr ähnlich.

Die Tatsache, daß es sich in dem beschriebenen Rechenverfahren nicht um eine Relaxation, sondern um nach Art der Thermospannungen aufgeprägte Spannungsänderungen handelt, zeigt sich erst am Ende des Prozesses. Sorgt man nämlich bei Annäherung an den stationären Spannungszustand durch besondere Maßnahmen nicht dafür, daß z.B. durch sukzessive Verkleinerung der Zeitschrittweite dieser Zustand überall im Körper, so wie man es von einer Spannungsrelaxation erwarten würde, gleichmäßig angenähert wird, so kann es zur Divergenz des Verfahrens kommen. Anwendern der Finite-Element-Rechenmethode ist die Eigenschaft, daß bei der Wahl zu großer Zeit-

schritte Instabilitäten auftreten, nicht unbekannt. Selbst wenn der Gleichgewichtszustand durch kleine Zeitschritte gut angenähert würde, verbleiben Spannungssoszillationen, die durch nachfolgende große Zeitschritte wiederbelebt werden und von dem stationären Spannungszustand wegführen. Diese unangenehme Eigenschaft hängt damit zusammen, daß in diesen Rechnungen erstens der stationäre Spannungszustand nicht an allen Orten zugleich erreicht wird und dadurch zweitens lokal und zwangsweise eingebrachte Kriechdehnungen zu Spannungsänderungen führen, die wegen der elastischen Kopplungseigenschaften des Körpers von globaler Natur sind und vom stationären Spannungszustand wieder wegführen können.

Bei der Einhaltung der oben genannten, verschärften Gleichgewichtsbedingung für Kriechen können die Instabilitätsprobleme (wie an einem Beispiel in Abschnitt 7 gezeigt wird) besser beherrscht werden, weil in diesem Fall Kriechdehnungen nicht direkt zu elastischen Wechselwirkungen im Körper führen.

Auf die Verletzung des Kräftegleichgewichts wird in ausführlicher Form auch im Anhang B II.2.1 eingegangen.

3. PRINZIPIELLE BETRACHTUNGEN ZUR BEHANDLUNG DES PROBLEMS

In Vorbereitung der nachfolgenden Abschnitte, in denen das Kriech- und Relaxationsproblem unter der im zweiten Abschnitt aufgestellten Prämisse mathematisch neu formuliert werden soll, dient dieser Abschnitt zur Einführung des dazu verwendeten Konzepts.

Bei komplexer Belastungsart stellt sich in dem Bauteil, dessen Kriecheigenschaften berechnet werden sollen, zum Zeitpunkt $t=0$ eine elastische Spannungsverteilung σ mit möglicherweise steilen Spannungsgradienten z.B. an Kerben ein. In konventioneller Rechnungsart wird angenommen, daß diese Spannungsverteilung für ein Zeitintervall Δt , das auch sehr klein gewählt werden kann, konstant ist und für den Ablauf des gewählten Zeitintervalls Δt im *Kriechgesetz wirksam wird*. Aus Gründen, die im vorherigen Abschnitt 2 dargelegt wurden, soll diese vereinfachende Annahme nicht mehr gemacht werden.

Die Konsequenz daraus ist, daß die elastische Spannungsverteilung σ , die zum Zeitpunkt $t=0$ durch äußere Belastung im Körper erzeugt wurde, *nicht, auch nicht für ein kleines Zeitintervall Δt , im Kriechgesetz wirksam wird*. Die Ursache dafür ist verständlich: -Das Kriechgesetz, das das Kriechverhalten eines kleinen Materialvolumens, d.h. ohne Berücksichtigung von Geometrieeinflüssen, beschreibt, erzwingt eine beliebige Dehnratenverteilung, die aber generell nicht mit den Verformungsmöglichkeiten eines Körpers von *komplexer Geometrie* kompatibel ist. Im konventionellen Verfahren werden in kleinen, *realen Zeitschritten* Kriechdehnungen erzwungen und die dadurch hervorgerufenen elastischen Gegenreaktionen des Körpers dazu benutzt, die elastische Spannungsverteilung sukzessive so umzulagern, daß schließlich nach Ablauf einer *realen* Zeit $t>0$, die dann im Kriechgesetz wirksame Spannung $\sigma(t)$ Kriechraten erzeugt, die mit den Verformungsmöglichkeiten des Körpers kompatibel sind. Danach ändert sich die Spannung nicht mehr. Der Kriechprozess ist stationär geworden.

In der vorliegenden Arbeit soll ebenfalls ein erster Zeitschritt Δt^* ausgeführt werden, um die elastische Gegenreaktion des Körpers zu prüfen. Der Zeitschritt wird jedoch zurückgenommen, so daß *keine reale, sondern eine fiktive Zeit t^** abgelaufen ist. Die elastischen Gegenspannungen, die bei der versuchsweise vorgenommenen Verletzung des Kräftegleichgewichts entstanden sind, werden ebenfalls zur Spannungsumlagerung der elastischen Spannungsverteilung benutzt. In weiteren fiktiven Zeitschritten (die alle zurückgenommen werden) entsteht daraus eine neue Spannung σ_{eq} , die im Kriechgesetz wirksam werden kann, ohne das Kräftegleichgewicht im Sinne der im vorherigen Abschnitt ausgesprochenen Prämisse zu verletzen. Die Gleichgewichtsspannungsverteilung σ_{eq} hat neben der elastischen Spannungsverteilung σ zum realen Zeitpunkt $t=0$ und danach gleichzeitig mit dieser eine Bedeutung. Für Detailsigenschaften der hier neu eingeführten Spannungsverteilung σ_{eq} wird auf die nachfolgenden Abschnitte verwiesen.

Die Existenz zweier Spannungsverteilungen, die gleichzeitig nebeneinander in einem Körper zu betrachten sind, bereitet möglicherweise begriffliche

Schwierigkeiten. Dazu sollte berücksichtigt werden, daß im Sinne der Herleitung die Gleichgewichtsspannungsverteilung σ_{eq} mit der Existenz eines Kriechgesetzes verknüpft ist, das unabhängig von den Verformungsmöglichkeiten des Körpers definiert wurde, auf den dieses angewendet wird. Man kann den Blickwinkel dadurch verändern, daß man sagt: "Das vorgegebene Kriechgesetz kann erst dann als Kriechgesetz für eine Komponente akzeptiert werden, wenn in ihm die kriechwirksame Gleichgewichtsspannung σ_{eq} verwendet wird." In diesem Fall wäre das Kriechgesetz selbstverständlich nicht mehr geometrieunabhängig und auch nicht unabhängig von der Belastungsart der Komponente. Das Problem der Existenz zweier Spannungsverteilungen läßt sich auch an einem einachsigen Zugversuch verdeutlichen. Gleichzeitig soll mit diesem Beispiel ein weiterer Problemkreis, das ist die assoziierte Spannungsrelaxation, aufgezeigt werden, der sich als Konsequenz aus der neuen Betrachtungsweise ergibt:

-In einem Zeitstandversuch berechnet man sich die im Probenquerschnitt vorhandene Spannung σ aus der Belastung pro Querschnittsfläche. Durch gleichzeitige Messung der Dehnrate kann man sich ein Kriechgesetz ableiten. Im Warmzugversuch mit konstanter, aufgeprägter Dehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ findet man unter idealisierten Verhältnissen nach Ablauf einer Zeit einen Plateauwert der Spannung σ . Diese Spannung σ wird üblicherweise durch die inverse Anwendung des Kriechgesetzes berechnet, da in diesem Fall nicht die Spannung σ , sondern die Dehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ gegeben ist. Im Zusammenhang mit dem Kontinuumsproblem ist allerdings nicht der Plateauwert der Spannung von Interesse, sondern vielmehr der transiente Bereich des Spannungsverlaufs im Warmzugversuch vor Ausbildung des Spannungsplateaus. In Anlehnung an die Verhältnisse im belasteten Körper mit komplexer Geometrie und Belastung soll die Probe außerdem vor Versuchsablauf durch eine vorab eingestellte Dehnung $\epsilon^{tot} \neq 0$ spannungsmäßig konditioniert worden sein.

Durch die Vorbehandlung möge zum Zeitpunkt $t=0$ eine beliebige, elastische Spannung σ in der einachsigen Zugprobe eingestellt worden sein. Gleichzeitig, d.h. ebenfalls zum Zeitpunkt $t=0$, ist bereits die konstante, aufgeprägte Dehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ wirksam. Da die Verformungsgeschwindigkeit der Probe eindeutig durch die aufgeprägte Dehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ bestimmt ist und außerdem das Kriechgesetz gültig sein soll, kann man sich wiederum durch inverse Anwendung des Kriechgesetzes eine Spannung σ_{eq} ausrechnen, die ganz sicher verschieden ist von der beliebig gewählten, elastischen Spannung σ , die zum Zeitpunkt $t=0$ durch die Vorbehandlung eingestellt wurde.

Wiederum ist möglicherweise schwer verständlich, warum nicht ähnlich wie im Zeitstandversuch die Spannung σ , sondern ausschließlich die Spannung σ_{eq} kriechwirksam sein soll. Um dazu eine befriedigende Erklärung abgeben zu können, muß der Begriff der *Kriechwirksamkeit* spezifiziert werden. Eine Spannung soll als *kriechwirksam im Sinne des Kriechgesetzes* bezeichnet werden, wenn das Ergebnis des Kriechprozesses eine Veränderung der Körperabmessungen bewirkt. Eine solche Spannung ist die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} , weil sie uneindeutig über das Kriechgesetz mit der Verformungsgeschwindigkeit verknüpft ist. Darüberhinaus ist aber auch der überschüssige Spannungsanteil $\sigma - \sigma_{eq}$ in ganz anderem Sinne kriechwirksam. Diese Art der Kriechwirksamkeit ist folgendermaßen zu erklären: -Durch die Vorbehandlung der einachsigen Zugprobe, durch die die Spannung $\sigma(t=0)$

in der Probe eingestellt wurde, wird gleichzeitig eine elastische Aufweitung der Kristallgitterstruktur bewirkt. Diese Aufweitung repräsentiert ein "elastisches Leervolumen", das durch kriechendes Material aufgefüllt werden kann, allerdings unter den Bedingungen des Warmzugversuchs nur teilweise aufgefüllt werden kann. Die teilweise Auffüllung des elastischen Volumens ist dadurch bedingt, daß es einen Nullzustand oder Gleichgewichtszustand der Aufweitung der Kristallgitterstruktur gibt, der unter den gegebenen Einflußbedingungen durch σ_{eq} bestimmt ist und der durch die der Probe aufgeprägte Verformungsgeschwindigkeit in einem dynamischen Gleichgewicht aufrechterhalten wird. Aus diesem Grunde ist die elastische Spannung σ in zweierlei Hinsicht kriechwirksam. Der Spannungsanteil σ_{eq} bewirkt eine Veränderung der äußeren Probenabmessung, während der Restanteil der elastischen Spannung $\sigma - \sigma_{eq}$ ein Materialkriechen bewirkt, das u.a. ein begrenztes elastisches Volumen auffüllt. Wenn das zur Verfügung stehende, elastische Volumen getilgt ist, ist $\sigma = \sigma_{eq}$, so daß dieser Anteil des Kriechens nicht mehr vorhanden ist. Modellmäßig kann man sich diesen Sachverhalt auch anhand einer Serienschaltung von Kriechtopf und elastischer Feder klarmachen.

Aus den Ausführungen ist unschwer zu erkennen, daß es sich bei dem *im Sinne des Kriechgesetzes kriechunwirksamen* Teil der Spannungsverteilung $\sigma - \sigma_{eq}$ um einen Spannungsanteil handelt, der im Zeitablauf *relaxiert*. Durch die Verschiebung des Anfangszustandes der Gitteraufweitung auf ein Niveau, das durch σ_{eq} bestimmt wird, kann, dem Modell entsprechend, "internes" Materialkriechen auch in umgekehrter Richtung stattfinden, nämlich so, daß eine zusätzliche Kristallgitteraufweitung erzeugt wird, wenn dieses anfänglich unter dem Niveau lag, das durch die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} bestimmt wird. Obwohl in jedem Falle die Differenzspannung $\sigma - \sigma_{eq}$ gegen null relaxiert, so bewirkt dieser Vorgang doch, daß, wenn man nur die Spannung $\sigma(t)$ betrachtet, diese sich, was zunächst überrascht, durch Relaxation vergrößern kann.

Die Grundlage aller dieser Betrachtungen ist, um es noch einmal deutlich auszusprechen, daß ein Körper oder Bauteil mit komplexer Geometrie und Belastung sich *lokal* nur kompatibel mit dem Gesamtsystem und unter Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen *kriechverformen* kann. Dadurch wird lokal ein quasi "dehnungsgesteuerter" Verformungsablauf erzwungen, solange keine Geometrie- und Belastungsänderungen auftreten bzw. solange diese vernachlässigbar klein sind. Spannungsanteile, die nicht zur Aufrechterhaltung des gleichgewichtigen Kriechens benötigt werden, relaxieren zu null.

In den nachfolgenden Abschnitten wird das numerische Berechnungsverfahren entwickelt. Das Problem der Kriechverformungen wird in Abschnitt 4 behandelt und davon getrennt in Abschnitt 5 das assoziierte Spannungsrelaxationsproblem dargestellt.

Die Problematik zweier gleichzeitig existierender Spannungen σ und σ_{eq} , d.h. der Unterschied zwischen einer elastischen und einer kriechwirksamen Spannungsverteilung, wird nochmals im Abschnitt B II.2.1 erklärt.

4. ANWENDUNG DER VERSCHÄRFTEN GLEICHGEWICHTSBEDINGUNG

Nach den vorangegangenen Ausführungen sind Spannungsberechnungen mit zwangsweise eingeführten Kriechdehnraten $\dot{\epsilon}^c$ (Anfangsdehnraten), die ihrerseits Spannungen erzeugen, nicht zulässig. Wenn man eine derartige Berechnung trotzdem ausführt, sind alle errechneten Spannungszustände vor dem Erreichen des stationären Spannungszustands im Sinne der für diese Arbeit gültigen Prämisse als falsch anzusehen. Insbesondere ist der so ermittelte zeitliche Spannungsverlauf nicht mit dem zeitlichen Verlauf der Spannungsrelaxation gleichzusetzen. Demnach läßt sich das herkömmliche Verfahren sinnvoll nur noch zur Bestimmung eines Spannungszustands einsetzen, der hier mit σ_{eq} bezeichnet werden soll. Der Spannungszustand σ_{eq} unterscheidet sich allerdings von dem stationären Spannungszustand dadurch, daß er nicht erst nach Ablauf einer Zeit erreicht wird, sondern schon für Zeiten $t \geq 0$ im Kriechgesetz wirksam ist.

Zusammenfassend heißt das: -Aufgrund der verschärften Gleichgewichtsbedingungen sollen die Relaxationseigenschaften der Gl. (3) zunächst verworfen werden (siehe Abschnitt 5). Vielmehr wird Gl. (3) dazu herangezogen, das *verschärfte Kräftegleichgewicht formell* zu definieren.

Da das Phänomen "Kriechen" zu keinem Zeitpunkt und an keiner Stelle des Körpers selbst Kräfte entwickeln kann, die zu neuen Spannungen führen, kann Gl. (3) nur unter der Zusatzbedingung

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (3a)$$

gültig sein. Dadurch wird eine Gleichgewichtsspannung $\sigma = \sigma_{eq}$, die die Gl. (3) einschließlich der Zusatzbedingung Gl. (3a) als gemeinsame Lösung erfüllt, definiert. Da die verschärften Gleichgewichtsbedingungen zu jedem Zeitpunkt gefordert werden, ist σ_{eq} auch zu jedem Zeitpunkt u.a. auch zum Zeitpunkt $t=0$ definiert.

Die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} ist im allgemeinen von der elastischen Spannung σ , die weiterhin mit σ bezeichnet werden soll, verschieden. Zur numerischen Berechnung von σ_{eq} kann u.a. das bereits erwähnte

Anfangsdehnungsverfahren für einen *fiktiven Zeitablauf* t^* unverändert eingesetzt werden. Damit sind jedoch implizit die schon beschriebenen Instabilitätsprobleme verknüpft, genau so wie sie bei der Berechnung der stationären Lösung nach dem bisherigen Verfahren auftraten. Durch die konzeptionelle Neufassung der Gl. (3) wird jedoch deutlich, daß es sich hierbei nicht mehr um ein Anfangswertproblem im Sinne von Differentialgleichungssystemen mit gegebenem Anfangswert zum Zeitpunkt $t=0$ handelt, sondern eher um eine Nullstellenbestimmung der Gl. (3). Dadurch können zusätzlich numerische Methoden zur Nullstellenbestimmung in Ansatz gebracht werden, wenn das Anfangswertproblem nicht vollständig konvergiert. Beim Problem der Nullstellenbestimmung ist es nicht nötig, im ganzen Körper gleiche, fiktive Zeitschritte zu wählen, denn der Gleichgewichtszustand σ_{eq} , der durch die Gln. (3) und (3a) definiert wird, ist zunächst erstmal

unabhängig von der fiktiven Zeit, nämlich ausschließlich für $t^* = \infty$, definiert. Durch vereinzelte, nachgezogene Dehnschritte kann die Nullstelle der Gl. (3) im Sinne einer Spannungsumlagerung gefunden werden.

Dadurch, daß das Anfangswertproblem in ein Problem zur Nullstellenbestimmung umgewandelt wurde, ist auch das Instabilitätsproblem leichter zu beherrschen.

Bei Benutzung eines Kriechgesetzes der Form

$$\dot{\epsilon}^c(\sigma) = \frac{3}{2} k \bar{\sigma}^{n-1} K \sigma \quad (4)$$

mit den Konstanten k und n des Norton'schen Kriechgesetzes, mit der nach von Mises berechneten effektiven Spannung

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (5)$$

mit der Matrixbeziehung

$$K\sigma = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (6)$$

und mit $\mu=0,5$ für volumenkonstantes Kriechen berechnet man daher z.B. zum Zeitpunkt $t=0$ nach den Gln. (3) und (3a) eine Gesamtdehnrates

$$\dot{\epsilon}^{\text{tot}}(t=0) = \dot{\epsilon}^c(\sigma_{\text{eq}}(t=0)) = \frac{3}{2} k \bar{\sigma}_{\text{eq}}^{n-1} K \sigma_{\text{eq}} \quad (7)$$

Die effektive Gleichgewichtsspannung $\bar{\sigma}_{\text{eq}}$ läßt sich wie $\bar{\sigma}$ nach Gl. (5) berechnen. Die Kriechmatrix K filtert den deviatorischen Anteil der Spannung σ heraus, so daß nach den Gln. (4) und (7) beide Dehnrates, die Gesamtdehnrates $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ und die Kriechdehnrates $\dot{\epsilon}^c$, Volumenkonstanz gewährleisten und Deviator tensoren sind, d.h. die Spuren der genannten Tensoren sind null. Auf diese Eigenschaft wird im Abschnitt 5.2.1 Bezug genommen, wo auch die deviatorische Schreibweise angewendet wird.

Im Sinne der Herleitung ist der Spannungszustand σ_{eq} aus dem Anfangsspannungszustand σ durch Umlagerung von Spannungen unter Einhaltung der Randbedingungen entstanden, ähnlich wie sonst üblicherweise eine stationäre Spannungsverteilung aber auch eine Thermospannungsverteilung berechnet wird. Daraus läßt sich ableiten:

-Die Differenz der Spannungsverteilungen $\sigma - \sigma_{eq}$ ist stets vom Typ einer Sekundärspannungsverteilung, d.h. an der Oberfläche des Körpers gibt es keine Normalspannungen und die Differenzspannungsverteilung ist durch ein System von einander entsprechenden Zug- und Druckzentren selbst kräftemäßig abgeglichen.

Die Spannungsverteilung $\sigma - \sigma_{eq}$ ist aus diesem Grunde weder zum Abgleich der von außen eingeleiteten Kräfte (Randbedingung) nötig, noch ist sie für die Aufrechterhaltung des Kriechprozesses von irgendwelchem Nutzen. Sie ist ihrer Natur nach mit einer Spannungsverteilung zu vergleichen, die durch einen festgehaltenen Verzerrungszustand anfänglich in einen Körper eingebracht wurde und die im nachfolgenden Zeitablauf komponentenunabhängig und unabhängig von einer elastischen Kopplung an benachbarte Koordinatenpunkte des Kontinuums frei relaxieren kann.

Die zeitliche Entwicklung der Spannungsverteilung $\sigma - \sigma_{eq}$ ist somit ein Relaxationsproblem, das von dem Problem der Kriechverformungen abgetrennt und unabhängig davon behandelt werden kann.

Das Relaxationsproblem wird im nachfolgenden Abschnitt getrennt weiterbehandelt. Wichtig ist, darauf hinzuweisen, daß der gerade vollzogene Gedankenschritt eine Neufassung der in diesem Zusammenhang gebräuchlichen Begriffe von der "Spannungsumverteilung" im Körper während des Kriechens und den "Pseudokriechkräften" beinhaltet. Weil das Phänomen Kriechen selbst keine Kräfte entwickeln kann, die zu neuen Spannungen führen, gibt es auch keine Pseudokriechkräfte. Wenn es diese Kräfte nicht gibt, so ist es auch nicht möglich, daß ein kleiner Teilbereich des Körpers mit einem benachbarten Teilbereich des Körpers über den Kriechmechanismus in elastische Wechselwirkung tritt. Wenn eine solche elastische Wechselwirkung aber ausgeschlossen wird, so kann es keine Umverteilung von Spannungen und Kräften im Körper geben. Das Ergebnis, das bisher durch einen Umverteilungsprozess erreicht wurde, nämlich die stationäre Spannungsverteilung, wird nach der begrifflichen Neufassung durch den Relaxationsprozess herbeigeführt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß, wenn ein überlagerter Anteil einer Spannungsverteilung von Typ einer Sekundärspannung durch Relaxation verschwindet, der verbleibende Spannungsanteil optisch so erscheint, als hätte gegenüber dem Ausgangszustand eine Umverteilung der Spannungen stattgefunden. Obwohl nach den vorhergehenden Überlegungen Spannungsumlagerungen aufgrund von Kriechen *physikalisch* nicht realistisch sind, so wird dieser Begriff doch weiterhin im Zusammenhang mit dem *mathematischen* Verfahren verwendet, das nunmehr in einem fiktiven Zeitablauf durch erzwungene Dehnungen Spannungen verlagert.

Die Spannungsverteilung σ_{eq} ist mit der stationären Spannungsverteilung des Kriechproblems, wie es bisher behandelt wurde, unter bestimmten Voraussetzungen numerisch gleich, aber konzeptionell verschieden.

Die Gleichgewichtsspannungsverteilung σ_{eq} ist diejenige Spannungsverteilung, die sich unter dem Zwang der Kontinuitätsbedingung und des Kräftegleichgewichts im Sinne der statischen Elastizitätstheorie ohne Zeitverzögerung sofort nach Anlegen der Belastung ergibt, so daß damit eine nach dem gegebenen Kriechgesetz berechnete Kriechdehnrate ermittelt werden kann, die das Kräftegleichgewicht und die Forderung nach Kontinuität nicht stört.

Zur weiteren Beschreibung der Eigenschaften von σ_{eq} kann an dieser Stelle ein Beispiel diskutiert werden: -Am Biegebalken stellt sich nach Anlegen einer Biegelast eine über den Balkenquerschnitt linear verteilte Spannung mit Maximalspannungen an den äußeren Fasern und einer spannungsneutralen Faser in der Mitte ein. Die Kontinuitätsbedingung, die unabhängig vom Zeitablauf also jederzeit gefordert wird, bedingt, daß eine Verformung des Balkens nur in der Weise erfolgen kann, daß beim Kriechen Querschnittsebenen nur in Querschnittsebenen überführt werden können. Würde man jedoch die Kriechrate wenn auch nur für einen kleinen, begrenzten Zeitabschnitt entsprechend des üblichen Potenzgesetzes berechnen und diese zwangsweise zur Ausführung bringen, so würden sich die höchstbelasteten Fasern überproportional dehnen und eine Querschnittsebene würde durch diesen Prozess in eine stark deformierte Fläche überführt werden. Wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten beschrieben, wird die Deformation zwar pro Zeitschritt korrigiert, aber nur unvollständig. Die Deformation wiederholt sich in jedem folgenden Zeitschritt in verzögertem Maße, bis stationäre Kriechbedingungen eintreten, d.h. der stationäre Spannungszustand erreicht wird. Soll die Verletzung des Kräftegleichgewichts und damit der Kontinuitätsbedingung im transienten Kriechbereich total vermieden werden, und das ist die Prämisse zu der vorliegenden Arbeit, so muß vom Zeitpunkt $t=0$ an die Spannungsverteilung σ_{eq} im Kriechgesetz wirksam werden.

Das Problem des Biegebalkens ist kein einfach zu diskutierendes Beispiel mehr, wenn die Randbedingung eines konstanten Biegemoments berücksichtigt wird. Insbesondere ist ein konstantes Biegemoment nicht mit einer Totlast identisch (siehe Abschnitt B II.2.2).

Nach Art ihrer Definition ist die Spannungsverteilung σ_{eq} abhängig von

- der äußeren Belastung des Körpers,
- den Geometrieänderungen, die durch das Kriechen hervorgerufen werden, und
- dem Kriechgesetz, wenn es z.B. Primärkriechen oder eine Schadensakkumulation mit beinhaltet, die in unterschiedlichen Materialteilen beschleunigtes oder verzögertes Kriechen verursacht.

Für den Fortgang der Rechnungen für Zeiten $t > 0$ ist wichtig, daß die Gleichgewichtsspannung $\sigma_{eq}(t > 0)$ nur dann konstant bleibt, wenn bei der Untersuchung von Probekörpern

1. die Belastung durch Totlasten erfolgt,
2. die Geometrieveränderungen des Probenkörpers wegen kleiner Kriechdehnungen vernachlässigbar klein sind und
3. das verwendete Kriechgesetz nur stationäres, nicht primäres oder tertiäres Kriechen des Materials beschreibt.

Diese Aussage folgt aus der Überlegung, daß die Gleichgewichtsspannung $\sigma_{eq}(t=0)$ durch die Gln. (3) und (3a), aber auch durch den zugehörigen Anfangswert der elastischen Spannung $\sigma(t=0)$ definiert wurde. Letzteres wird dadurch ersichtlich, daß die Gleichgewichtsspannung als eine Umlagerung der elastischen Spannung anzusehen ist. Geometrieveränderungen, Belastungsänderungen oder explizite zeitliche Änderungen des Kriechgesetzes nehmen daher Einfluß auf die Gl. (3) und verändern somit auch die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} .

Wird eine Kriechrechnung unter den genannten *vereinfachenden Bedingungen 1. bis 3. durchgeführt*, so ist, abgesehen von dem abgetrennten Relaxationsproblem der Aufwand für diese Rechnung gegenüber einer Kriechrechnung ohne verschärfte Gleichgewichtsbedingungen etwa gleichzubewerten. Der Unterschied besteht nur darin, daß die traditionelle Rechnungsart unter Ablauf einer *realen* Zeit im Sinne eines Anfangswertproblems von Differentialgleichungen erfolgt, während nach der vorliegenden Methode im wesentlichen der gleiche Algorithmus zum vorgezogenen Zeitpunkt $t=0$ über eine *fiktive* Zeit t^* abläuft. Das Ergebnis ist eine bei $t=0$ ermittelte, zeitlich konstante Kriechdehnratenverteilung, die zur Berechnung der Kriechverformungen für nachfolgende Zeiten $t > 0$ benutzt werden kann.

Sind die *vereinfachenden Bedingungen 1. bis 3. nicht gegeben*, so muß die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} für jeden nachfolgenden Zeitschritt erneut berechnet werden. Damit ist die Kriechrechnung der Form und dem Aufwand nach mit einer zeitunabhängigen elasto-plastischen Verformungsrechnung zu vergleichen. Bei solchen Rechnungen wird in einer äußeren Programmschleife die Materialbelastung in kleinen Schritten akkumuliert und in einer inneren Programmschleife über eine fiktive Zeit ein plastisches Dehnungsinkrement ermittelt, das die Fließbedingung und die nicht-linear elastischen Bedingungen gleichzeitig erfüllt²⁰. Bei der entsprechenden Kriechrechnung ist nunmehr die Lastaufbringung in der äußeren Programmschleife an einen realen Zeitablauf gekoppelt, während der Zeitablauf in der inneren Programmschleife nach wie vor fiktiv ist. Im weiteren Vergleich wird das Fließgesetz mit dem Kriechgesetz gleichgestellt, und die hier eingeführte, verschärfte Gleichgewichtsbedingung entspricht dem Fall der idealen Plastizität, d.h. Kriechdehnungen sind nicht unmittelbar mit Spannungsänderungen verknüpft, obwohl in einem assoziierten Prozess eine Sekundärspannungsverteilung relaxieren darf.

Die Anfangsdehnungsmethode ist, wie bereits diskutiert, ein unter Umständen instabiles Rechenverfahren. Die Instabilitätsprobleme werden jedoch beherrschbarer, weil das Verfahren jetzt nicht mehr an eine reale Zeit gekoppelt ist, sondern an eine fiktive. Es wird also nicht mehr nach einer stationären Lösung des Problems gesucht, die nur über einen strengen Zeitablauf approximativ erreicht werden kann, sondern nach einer Nullstelle der Gl. (3) unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen. Damit kann der alle Koordinatenpunkte verbindende, strenge Zeitablauf bei Bedarf lokal durchbrochen werden. Es ist in der Tat die zusätzliche Freiheit gegeben, andere numerische Methoden zur Nullstellensuche zusätzlich zum Einsatz zu bringen.¹⁸

Im weiteren Vergleich zwischen dem zeitunabhängigen plastischen Problem und dem Kriechproblem soll erwähnt werden, daß beim Kriechen anstelle der Größen Spannung, Dehnung und Verschiebung deren zeitliche Ableitungen auftreten. Nur im Kriechgesetz werden Spannungen mit Dehnraten verknüpft. Diese Eigenschaft erlaubt es auch, die Anfangsdehnungsmethode im Kriechproblem zu verwenden, obwohl dieses Verfahren im ideal plastischen Fall der elasto-plastischen Verformung Schwierigkeiten hervorruft.

Für die im folgenden beschriebene Rechnung am dickwandigen Rohr gelten die Voraussetzungen 1. bis 3. . Für die Rechnungen an der gekerbten Rundprobe ist vorgesehen, eine fortlaufende Geometrieänderung (siehe Fall 2.) unter dem Einfluß der Kachanow'schen Schadensakkumulation (siehe Fall 3.) zu berücksichtigen. Das dafür benötigte Rechenprogramm steht zum Zeitpunkt der Niederschrift dieses Papiers jedoch noch in der Entwicklung. Die im Abschnitt 7 mitgeteilten Rechenergebnisse zur gekerbten Rundprobe beziehen sich daher ebenfalls auf die Bedingungen 1. bis 3..

Im Fortgang der Beschreibung des methodischen Verfahrens ist als nächstes das Problem der Relaxation zu behandeln.

5. PROBLEMATIK DER SPANNUNGSRELAXATION

5.1 Definition der Relaxationsgleichungen

Die Gleichung (3) einschließlich der Zusatzgleichung (3a) wird im Sinne der Ausführungen des Abschnitts 4 dazu benutzt, eine Gleichgewichtsspannung σ_{eq} zu definieren, unter der eine Dehnbewegung $\dot{\epsilon}^{tot}(\sigma_{eq})$ so ablaufen kann, daß in dem belasteten Körper aufgrund des Kriechens keine zusätzlichen Spannungen entstehen. Im speziellen Fall des Balkens unter konstantem Biegemoment wird damit angesprochen, daß auch im transienten Kriechbereich die Dehnbewegung $\dot{\epsilon}^{tot}(\sigma_{eq})$ nur so geartet sein kann, daß ebene Querschnitte beim Kriechen nur in ebene Querschnitte überführt werden können. Neben der kriechwirksamen Gleichgewichtsspannung σ_{eq} , deren Bedeutung eingehend im vorherigen Abschnitt erklärt wurde, existiert gleichzeitig die durch die Körperbelastung bestimmte elastische Spannung σ . Unter stationären Bedingungen (Bedingungen 1. bis 3. aus Abschnitt 4) kann die Spannungsdifferenz $\sigma - \sigma_{eq}$ unabhängig von dem kontinuierlich fortschreitenden Kriechprozess relaxieren, so daß mit Ablauf einer Zeit die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} durch die elastische Spannung σ asymptotisch approximiert wird.

Während in dem traditionell üblichen Verfahren ohne Anwendung der verschärften Gleichgewichtsbedingung die Gl. (3) einen doppelten Aspekt hat (d.h., sie dient gleichzeitig als Gleichgewichtsbedingung nach Erreichen des stationären Zustands und als Relaxationsgleichung vor Erreichen des stationären Zustands), wird in dem hier beschriebenen Verfahren bisher nur eine Eigenschaft ausgenutzt, nämlich diejenige, die zur Definition der Gleichgewichtsspannung σ_{eq} führt. Es erscheint aber durchaus sinnvoll, die Gl. (3) auch für das assoziierte Spannungsrelaxationsproblem einzusetzen, da die Spannungsrelaxation ursächlich ebenfalls mit den Kriecheigenschaften des Materials zusammenhängt, obwohl *während eines reinen Spannungsrelaxationsexperiments Kriechverformungen der äußeren Abmessungen direkt nicht nachweisbar* sind. Gegen den unmittelbaren Einsatz der Gl. (3) als Spannungsrelaxationsgleichung sprechen jedoch zunächst die folgenden beiden Überlegungen:

- In einem Experiment soll eine zylindrische Zugprobe *einachsige* belastet werden. Anschließend wird der erreichte Dehnungszustand fixiert. Man erwartet, daß sich die Spannungen nach Ablauf einer großen Zeitspanne durch Relaxation vollständig abbauen. Die Vorstellungen dazu sind die, daß die ehemals eingebrachten, elastischen Dehnungen sukzessive durch Kriechdehnungen ersetzt werden. Wenn dieser Vorgang unter *Einbeziehung der drei Raumrichtungen* nochmals durchdacht wird, so ergibt sich ein Problem der *reinen Spannungsrelaxation*:

-Die elastisch eingebrachten Dehnungen sind für Poissonzahlen $\nu < 0,5$ mit Volumenaufweitungen bzw. Volumenkompressionen verknüpft. Sollen die Kriechdehnungen die elastischen Dehnungen aufzehren, so müssen sie entsprechend den elastischen Volumenänderungen *summa summarum* bezogen auf ein differentielles Volumenelement auch Volumen

tilgen oder erzeugen. Das ist jedoch nicht möglich, weil das Kriechgesetz im Hinblick auf den stationären Kriechbereich so definiert ist, daß Volumenkonstanz gewährleistet wird. Wenn jedoch z.B. eine elastische Volumenaufweitung nicht rückgängig gemacht werden kann, so müssen selbst nach unendlich langen Zeiten noch Spannungen, die der Relaxation nicht zugänglich sind, verbleiben. Dieser Befund entspricht nicht den Vorstellungen des Experimentators.

- Aus der Gl. (1) läßt sich die gleiche Problematik folgendermaßen erkennen: -Der Term $\dot{\epsilon}$ erzeugt Kriechdehnungen unter Wahrung der Volumenkonstanz. Der Term $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}(\sigma_{\text{eq}})$ erzeugt ebenfalls Kriechdehnungen entsprechend Gl. (7) unter Wahrung der Volumenkonstanz, während der dritte Term in Gl. (1) die Volumenkonstanz nicht wahrt. Es muß somit festgestellt werden, daß Gl. (1) in Zusammenhang mit den Gln. (4) und (7) bezüglich der Volumenerhaltung eine Ungleichung ist und für die *reine Spannungsrelaxation* so nicht mehr verwendet werden kann.

Es ist sinnvoll, an dieser Stelle einige grundlegende Betrachtungen anzustellen. Bei Bauteilberechnungen sind zwei Behandlungsweisen der Spannungsrelaxation üblich, die als Grenzfälle des Materialverhaltens behandelt werden könnten. Wenn in einem Volumenelement innerhalb eines Körpers eine Spannung oder ein Spannungsanteil durch Relaxation verschwindet, so kann der Vorgang eine Wirkung zeigen, die

- entweder ausschließlich in das Innere des Volumenelements
- oder ausschließlich nach außen gerichtet ist.

Da dies zwei Grenzfälle sind, könnte man vermuten, daß das reale Verhalten des Körpers während der Relaxation i.a. weder durch den einen, noch den anderen Grenzfall in eindeutiger Weise beschrieben werden kann. Diese Grenzfälle sollen wie folgt diskutiert werden:

5.1.1 Reine Spannungsrelaxation

Bei einer Wirkung, die ausschließlich in das Innere des Volumenelements gerichtet ist, liegt der Fall der *reinen Spannungsrelaxation* vor. Das Volumenelement ist, wie auch bei dem typischen Relaxationsexperiment, komponentenweise auf eine bestimmte Dehnung fixiert, und die Spannung im Probeninnern kann abklingen, ohne daß die äußeren Abmessungen der Probe sich ändern. Wenn solche Verhältnisse in jedem der Volumenelemente eines Körpers unterstellt werden, so tritt während der Spannungsrelaxation keine Wechselwirkung eines Volumenelements mit benachbarten Volumenelementen auf. Es handelt sich damit um eine unabhängige oder eine "Punkt-für-Punkt"-Relaxation, die an jedem Ort -losgelöst von dem Restproblem- berechnet werden kann, sofern man den Anfangswert der Spannung und das Relaxationsgesetz kennt.

Wenn die reine Spannungsrelaxation auf der Basis des Kriechens verstanden werden soll, so kommt man in eine Konfliktsituation. Da der Kriechprozess das Volumen erhält, müßten auch Querkontraktionen, das heißt

Dehnungsreaktionen stattfinden, die jedoch gerade per Definition ausgeschlossen wurden. Möchte man mit einheitlichen Voraussetzungen arbeiten, so muß man die Forderung nach Volumenerhaltung des Kriechprozesses aufgeben, soweit dieser zur Beschreibung der reinen Spannungsrelaxation benutzt wird.

Zur genauen Formulierung der reinen Spannungsrelaxation kann daher ein Maxwell-Modell und die im Abschnitt 3 beschriebenen einachsigen Versuchsbedingungen eines Warmzugversuchs mit anfänglicher Vordehnung ins Auge gefaßt werden. Betrachtet man in diesem Modell den Dehnratenunterschied $\dot{\epsilon}^c(\sigma_{eq}) - \dot{\epsilon}^c(\sigma)$, so entspricht dieser gerade der elastischen Dehnrate $\dot{\epsilon}^{el} = \dot{\sigma}/E$, weil $\dot{\epsilon}^c(\sigma_{eq})$ mit der totalen Dehnrate des Maxwellgliedes identisch ist.

In diesem Sinne wird der Versuch einer Neudefinition der reinen Spannungsrelaxation unternommen:

Es wird vorgeschlagen, die Relaxation über die einachsigen, unabhängigen Gleichungen

$$(\mu+1) k \sigma_{ij,eq}^n = \dot{\epsilon}_{ij}^{el} + (\mu+1) k \sigma_{ij}^n \quad (8)$$

mit $ij = 11, 22, 33, 12, 23, 31$

ablaufen zu lassen, d.h. ohne die tensoriellen Verknüpfungseigenschaften der Gl. (3) und ohne Verwendung der von Mises'schen Effektivspannung, die durch die Gln. (4) und (7) implizit in der Gl. (1) enthalten ist. Für die Gl. (8) muß die zusätzliche Forderung aufgestellt werden, daß sie unabhängig vom gewählten Koordinatensystem gelten. Deswegen soll vereinbart werden, daß vor Ausführung der Rechnung ein lokales Koordinatensystem bereitgestellt wird, in dem der Tensor σ_{eq} nur Hauptspannungskomponenten enthält. Die Poissonzahl des Kriechens μ wird, wie auch in Gl. (6), für volumenkonstantes Kriechen mit dem Wert $\mu=0,5$ identifiziert. Der Faktor $\mu+1$ wird aus den Ausführungen des nachfolgenden Abschnitts 5.2 verständlich. Die Relaxationsgleichungen (8) können für numerische Zwecke in Experimentnachrechnungen angewendet werden. Die Autoren sind sich dessen bewußt, daß verbesserte Ansätze zur Beschreibung der Spannungsrelaxation, wie in Abschnitt 5.1.3 qualitativ belegt, gesucht werden müssen. Solange diese aber nicht vorliegen, kann man mit den Gleichungen (8) die Relaxation vorläufig beschreiben.

5.1.2 Reine Dehnungsrelaxation

Im Falle einer *reinen Dehnungsrelaxation* darf jedes Volumenelement eine seiner Spannung entsprechende elastische Dehnung nach außen abgeben. Soll wie bei der reinen Spannungsrelaxation auch bei der reinen Dehnungsrelaxation das Phänomen Kriechen als die Ursache der Relaxation

angesehen werden, so muß wiederum die Forderung nach Volumenerhaltung des Kriechens, sofern es die Relaxation betrifft, zurückgestellt werden, denn ein allseitig gleichmäßig komprimiertes Volumenelement kann sich dehnungsmäßig nicht entlasten, ohne gleichzeitig sein Volumen zu vergrößern.

Da die lokale reine Dehnungsrelaxation eines Volumenelements benachbarte Volumenelemente elastisch beeinflusst, wird die Spannungsverteilung im gesamten Körper gestört. Diese lokale Störung wird, wie im Abschnitt 2 beschrieben, bei Anwendung der Finite-Element-Methode stets mit Hilfe des Anfangsdehnungsverfahrens umgelagert. Dadurch wird folgendes erreicht: -Nicht der gesamte, gemäß den unabhängigen Relaxationsgleichungen (8) freigesetzte lokale Dehnungsbetrag kann auch ausgeführt werden, sondern wegen der Wechselwirkung aller Volumenelemente, mathematisch dargestellt durch die Gleichungen der Verschiebungskontinuität und des Kräftegleichgewichts, nur ein gemeinsam verträglicher Dehnungsanteil. Dementsprechend werden bis zur vollständigen Spannungsrelaxation von σ auf den Wert σ_{eq} die mit den Gln. (8) schrittweise berechneten freigesetzten elastischen Dehnungsbeträge in vielen elastischen Rechenschritten mittels Gl. (3) spannungsmäßig ständig umgelagert. Dadurch wird die Berechnung einer reinen Dehnungsrelaxation aufwendiger als eine entsprechende Rechnung, die unter den Voraussetzungen der reinen Spannungsrelaxation ausgeführt wird.

Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß in diesen diskutierten Grenzfällen weder die eine noch die andere Form der Spannungsrelaxation die kriechwirksame Spannung σ_{eq} nachträglich beeinflussen kann. Die kriechwirksame Spannung σ_{eq} läßt sich nur verändern, wenn eine der Bedingungen 1.-3. des Abschnitts 4 verletzt ist. Im Zusammenhang mit der Relaxation bedeutet das hauptsächlich, daß während ihres Ablaufs keine nach außerhalb des Körpers gerichteten Kräfte auftreten dürfen (Bed. 1, Abschnitt 4). Im Falle der *reinen Spannungsrelaxation* sind solche Kräfte per Definition und pro Volumenelement ausgeschlossen. Die reine Dehnungsrelaxation läuft so ab, daß wegen der zwischengeschalteten Prozedur zur Spannungsumlagerung stets nur Spannungsdekremente zur Relaxation gelangen, die in ihrer Verteilung im Körper vom Typ einer Sekundärspannungsverteilung sind. Damit ist sichergestellt, daß während des gesamten Relaxationsvorgangs die zu jedem Zeitpunkt t vorherrschende Spannungsverteilung $\sigma(t) - \sigma_{eq}$ eine Sekundärspannungsverteilung bleibt und damit zu keinem Zeitpunkt nach außen gerichtete Kräfte erscheinen, die die kriechwirksame Spannung σ_{eq} in wechselseitiger Beziehung beeinflussen könnten.

5.1.3 Modell einer Spannungs-Dehnungsrelaxation

Das Ergebnis von eingehenderen Betrachtungen ist, daß man sowohl für die reine Spannungsrelaxation als auch für die reine Dehnungsrelaxation die Volumenerhaltung des Kriechens pro Volumenelement offensichtlich nicht fordern kann, wenn das Kriechen als einzige Basis für die Relaxation eingesetzt wird. Im Folgenden soll ein Hinweis gegeben werden, der den Widerspruch möglicherweise lösen könnte. Gleichzeitig führt dieser Lö-

sungsvorschlag weg von der krassen Grenzfallsituation mit reiner Spannungsrelaxation auf der einen und reiner Dehnungsrelaxation auf der anderen Seite. Zunächst seien die Verhältnisse, die zur Relaxation einer Spannung in einem axial belasteten Rundstab führen, unter Berücksichtigung der Volumenerhaltung beschrieben:

-Bei Belastung, d.h. bei Überführung in einen festgehaltenen Dehnungszustand in einer Richtung, verkleinert sich der Durchmesser des Rundstabs entsprechend der Querkontraktionszahl $\nu < 0,5$, so daß eine elastische Volumenaufweitung proportional $1-2\nu \neq 0$ entsteht. Während des sich anschließenden Relaxationsprozesses verkleinert sich der Durchmesser weiterhin bis auf eine Querkontraktionszahl $\mu = 0,5$, weil gerade mit dieser Zahl keine Volumenaufweitung ($1-2\mu = 0$) verknüpft ist. Die ehemals elastische Volumenaufweitung proportional $1-2\nu \neq 0$ ist dann durch Kriechen mit äußerer Quelle und innerer Senke getilgt.

Reine Spannungsrelaxation tritt nur in axialer Richtung auf, während in radialer Richtung eine Dehnungsreaktion zu berücksichtigen ist. Die Gitteraufweitung ist durch Material, das sich von der Oberfläche in Richtung des Körperinnern bewegt hat, getilgt worden. Dieser Prozess ist nicht unähnlich dem eines Diffusionsproblems, das sich wie alle anderen Transportphänomene an Dichtegradienten orientiert. Betrachtet man den inversen Vorgang, so kann man sagen, daß eine elastische Volumenaufweitung, d.h. ein Leervolumen, aus dem Körperinnern an die Volumenoberfläche diffundiert sei. Diese Überlegung führt unmittelbar auf ein analoges Wärmeleitungsproblem, das wie folgt charakterisiert werden kann:

-Ein Rundstab, der zum Zeitpunkt $t=0$ auf eine Temperatur $T \neq 0$ gleichförmig aufgeheizt sei, werde zu diesem Zeitpunkt der Umgebung mit der Temperatur $T=0$ ausgesetzt. Die homogene Anfangsverteilung in T wird sich zeit- und ortsabhängig ändern, d.h. die Temperatur wird außen stärker abnehmen als innen und das mittlere Temperaturniveau wird sich abbauen, in Abhängigkeit von vorgebbaren Stoffparametern. Erste Versuche zur Beschreibung gemessener Relaxationskurven wurden mit diesem Modell bereits durchgeführt.

In einem solchen Modell ist die Spannungsrelaxation an einen kontinuierlichen Kriechstrom gekoppelt, der innerhalb eines Körpers die Druckzentren mit den Zugzentren verbindet, aber auch Körperoberflächen als Quellen oder Senken mit einbezieht. In dieser Form ist das Relaxationsproblem in die Klasse der thermo-elastischen Probleme einzuordnen.

Für die vorliegenden Rechnungen wurde der Einfachheit halber eine Behandlung angewendet, wie sie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben ist. Der Aufwand für die Behandlung der komplizierteren Fälle, wie in Abschnitt 5.1.2 und 5.1.3 beschrieben, ist im Hinblick auf einen Genauigkeitserfolg insbesondere für einfache ingenieurtechnische Anwendungen möglicherweise nicht lohnend.

Im folgenden Unterabschnitt 5.2 sollen die Eigenschaften der Gln. (8) diskutiert werden.

5.2 Eigenschaften der Relaxationsgleichungen

5.2.1 Die Prandtl-Reuss Gleichungen der Elasto-Plastischen Theorie

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß mit der Definition der unverkoppelten Gleichungen Gln. (8), die in engem Zusammenhang mit den Gln. (7) zu sehen sind, eine Relaxationsbeziehung gefunden wurde, die mit den beiden Prandtl⁴-Reuss⁵ Gleichungen

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{tot}} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G} + 2\bar{\lambda} s_{ij} \quad (9)$$

$$\dot{\epsilon}_{ii}^{\text{tot}} = \frac{\dot{\sigma}_{ii}}{3K_m} \quad (10)$$

für elasto-plastische Verformungen verträglich ist. In den Gln. (9) und (10) sind

der Schubmodul $G = E/[2(1+\nu)]$,
und der Kompressionsmodul $K_m = E/[3(1-2\nu)]$,
sowie eine Konstante $\bar{\lambda}$,

die mit der Verformungsarbeit pro Zeiteinheit unter Fließbedingungen verknüpft ist¹⁹, als Abkürzung benutzt worden. Für die Variablen in den Gln. (9) und (10) wurde die deviatorische Schreibweise verwendet, die die weiteren Abkürzungen impliziert:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= K \sigma_{ij} & e_{ij}^{\text{tot}} &= K \epsilon_{ij}^{\text{tot}} \\ \dot{\sigma}_{ii} &= \sum_i \dot{\sigma}_i & \dot{\epsilon}_{ii}^{\text{tot}} &= \sum_i \dot{\epsilon}_i^{\text{tot}} \end{aligned}$$

mit $ij = 11, 22, 33, 12, 23, 31$

Die Matrix K aus Gl. (6) bildet die Komponenten des Spannungstensors σ_{ij} , der in vektorieller Schreibweise ausgeführt ist, auf die Komponenten des Deviatorstensors s_{ij} ab. Das gleiche gilt für die Gesamtdehnrate. Ähnliche Gleichungen werden auch in der Theorie der linearen Visko-Elastizität verwendet²¹.

Bei der Behandlung der elasto-plastischen Verformungen nach Prandtl-Reuss werden die im Abschnitt 5.1 angesprochenen Problempunkte der Volumenerhaltung durch die Gl. (1) einerseits und der Volumenerhaltung durch das Kriechgesetz andererseits, durch zwei getrennte Gleichungen (den Gln. (9) und (10)) formuliert.

Die Gl. (9) ist eine Beziehung zwischen den Deviatoren der Gesamtdehnraten $\dot{\epsilon}_{ij}^{tot}$, der Spannung s_{ij} und deren Änderungsrate \dot{s}_{ij} . Dadurch sind alle Fragen der Volumenerhaltung ausgeklammert, weil die Spur der Tensoren null ist und somit keine Verknüpfung, weder mit der Volumenänderungsrate noch mit der Änderungsrate des hydraulischen Spannungsanteils, hergestellt wird.

Die Fragen der Volumenerhaltung bzw. dessen -nichterhaltung bezüglich der Spannungsrelaxation sind vielmehr in der Gl. (10) getrennt behandelt. Sie läßt sich aus Gl. (1) ableiten, in dem man auf alle Tensoren der Gleichung den Operator "Spur" anwendet. Die Spur von $\dot{\epsilon}$ ist für Kriechdehnungen gleich null, während sie im Fall thermischer Dehnungen $\dot{\epsilon}_{ii} = 3\alpha\dot{T}$ ist. Damit erhält man aus Gl. (1) die Gleichung

$$\dot{\epsilon}_{ii}^{tot} = \dot{\epsilon}_{ii}^{el} \quad (10a)$$

die mit Gl. (10) identisch ist, wenn zusätzlich, entsprechend des Hook'schen Gesetzes Gl. (2), die Änderungsrate des elastischen Volumens $\dot{\epsilon}_{ii}^{el}$ mit der ersten Invariante der Änderungsrate des Spannungstensors $\dot{\sigma}_{ii}$ über den Kompressionsmodul K miteinander verknüpft werden.

$$\dot{\epsilon}_{ii}^{el} = \dot{\sigma}_{ii} / 3K_m \quad (11)$$

Um einen Vergleich des Gleichungssystems Gln. (8) mit den Prandtl-Reuss Gleichungen durchzuführen, stört einerseits die nicht-lineare Verknüpfungseigenschaft zwischen den Spannungen σ und σ_{eq} in den Gln. (8). Da andererseits die Prandtl-Reuss Gleichungen nur lineare Verknüpfungseigenschaften besitzen, kann der Vergleich nur im Sonderfall $n=1$ durchgeführt werden. Multipliziert man die so abgeänderte Gl. (8) von links mit der Matrix K , so entsteht daraus eine Beziehung zwischen Deviatoren.

$$(\mu+1) k s_{ij}^{eq} = \dot{\epsilon}_{ij}^{el} + (\mu+1) k s_{ij} \quad (12)$$

Nach Gl. (7), ebenfalls ausgeführt für den Sonderfall $n=1$, ist für $\mu=0,5$ die linke Seite der Gl. (12) identisch mit $\dot{\epsilon}_{ij}^{tot}$. Aus den Gln. (12) entstehen die Gln. (14), wenn zusätzlich entsprechend des Hook'schen Gesetzes Gl. (2) die Änderungsraten der Deviatoren von elastischen Dehnungen $\dot{\epsilon}_{ij}^{el}$ und Spannungen \dot{s}_{ij} über den Schermodul miteinander verknüpft werden:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{el} = \dot{s}_{ij}/2G \quad (13)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{tot} = \dot{s}_{ij}/2G + (\mu+1) k s_{ij} \quad (14)$$

Die Gln. (14) entsprechen den Prandtl-Reuss Gln. (9), wobei die Fließkonstante $\bar{\lambda}$ durch die Konstanten des Norton'schen Kriechgesetzes μ und k ersetzt sind.

Die zweite der beiden Prandtl-Reuss Gln., d.i. Gl. (10), ist in diesem Zusammenhang neu und kann daher nicht aus den Gln. (8) abgeleitet werden.

Gl. (10) kann vielmehr mit Hilfe der Gln. (8) zur expliziten Berechnung einer Volumenänderungsrate $\dot{\epsilon}_{ii}^{tot}$ eingesetzt werden.

Möchte man daher im Verlauf einer Kriechverformungsrechnung zusätzlich die elastischen Volumenänderungen des Materials explizit angeben, so kann dieses durch Integration der nachfolgenden Gl. (15) geschehen.

$$\dot{\epsilon}_{ii}^{tot} = (\mu+1) k (\sigma_{ii,eq}^n - \sigma_{ii}^n) \quad (15)$$

Gl. (15) entsteht aus den Gln. (10a) und (8) dadurch, daß $\dot{\epsilon}_{ii}^{el}$ eliminiert wird. Wie auch schon im Zusammenhang mit den Gln. (8) erwähnt, soll das Koordinatensystem pro Koordinatenpunkt jeweils so gewählt werden, daß der Tensor σ_{eq} keine Scherspannungsanteile hat. Dieses ist der Nachteil, den man in Kauf nehmen muß, wenn die Relaxationsgleichungen nicht auf Invarianten aufgebaut sind. Bei einer reinen Spannungsrelaxation ist die berechnete Volumenänderung nicht meßbar. Im Fall reiner Dehnungsrelaxation mit meßbaren, elastischen Dehnungsänderungen sollten diese Volumenänderungen getrennt behandelt werden. Sie sind dann gemeinsam mit thermischen Volumenänderungen $\dot{\epsilon}_{ii}^{tot} = 3\alpha\dot{T}$ zu bewerten.

5.2.2 Alternative Möglichkeit zur Beschreibung der Spannungsrelaxation

Die Gln. (8) sind für die vorliegende Arbeit zur Behandlung des Problems "Spannungsrelaxation" vorgeschlagen. Möglicherweise können auch etwas anders geartete Gleichungssysteme zur Beschreibung der Relaxation herangezogen werden, die im Grenzfall linearer Ratenbeziehung ebenfalls nicht im Widerspruch zu den Prandtl-Reuss Gleichungen stehen. Eine solche alternative Möglichkeit soll im folgenden erörtert, jedoch auch gleichzeitig wieder verworfen werden.

Die Gln. (3), die im dem herkömmlichen Verfahren ohne Anwendung der verschärften Gleichgewichtsbedingungen, wie bereits erwähnt, gleichzeitig den stationären Zustand definieren und die Spannungsrelaxation beschrei-

ben, sollen nochmals untersucht werden. Ersetzt man in Gl. (3) zum Zwecke der Spannungsrelaxation aus den Gln. (4) und (7) die Größen $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ und $\dot{\epsilon}^{\text{c}}(\sigma)$, so entsteht

$$\dot{\sigma} = \frac{3}{2} k D K (\bar{\sigma}_{\text{eq}}^{n-1} \sigma_{\text{eq}} - \bar{\sigma}^{n-1} \sigma) \quad (16)$$

Aus den Gln. (16) läßt sich nur dann eine Deviatorbeziehung ähnlich der Prandtl-Reuss-Gl. (9) bilden, wenn wiederum $n=1$ gewählt wird und wenn die Matrix $D \cdot K$ diagonal ist, d.h. die Spannungskomponenten aus verschiedenen Raumrichtungen nicht vermischt werden.

Möchte man aus diesem Grunde eine Diagonalmatrix $D \cdot K$ verwenden, so muß zwangsläufig die stark einengende Annahme $\mu=\nu$ getroffen werden. Damit beschränkt man sich auf ein idealisiertes Material, das sich bezüglich seiner Querkontraktionseigenschaften gleich verhält, irrespektive ob Kriechen oder elastische Verformung die Ursache für die Querkontraktion ist.

Vernachlässigt man die Auswirkungen einer solchen Annahme und erklärt die Gln. (16) als maßgebende Gleichungen für die Berechnung der Spannungsrelaxation, so muß weiterhin geprüft werden, ob eine Relaxation der Spannung σ gegen die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} (hier gleichzusetzen mit stationärem Spannungszustand) erfolgt. Diese Forderung wird im allgemeinen erfüllt, da die stationäre Bedingung $\dot{\sigma}=0$ nur über $\sigma=\sigma_{\text{eq}}$ erreicht werden kann.

Es gibt jedoch einen Sonderfall, der entscheidende Bedeutung hat: -Untersucht man z.B. mit Hilfe der Gln. (16) und $\mu=\nu$ die Spannungsrelaxation an einer Stelle, an der ein äqui-dreiachsiger Spannungszustand herrscht, so ist der Spannungstensor σ_{eq} in allen Komponenten gleich, aber von null verschieden, und die Effektivspannung $\bar{\sigma}_{\text{eq}}$ ist null. Damit ist jeder äqui-dreiachsige Spannungszustand σ eine stationäre Lösung ($\dot{\sigma}=0$) der Gl. (16).

Wegen der Mehrdeutigkeit der Lösung wurde entschieden, daß die an sich naheliegende Form der Relaxation nach den Gln. (16) nicht verwendet werden kann, wenn das zu behandelnde Problem äqui-dreiachsige Spannungszustände enthält.

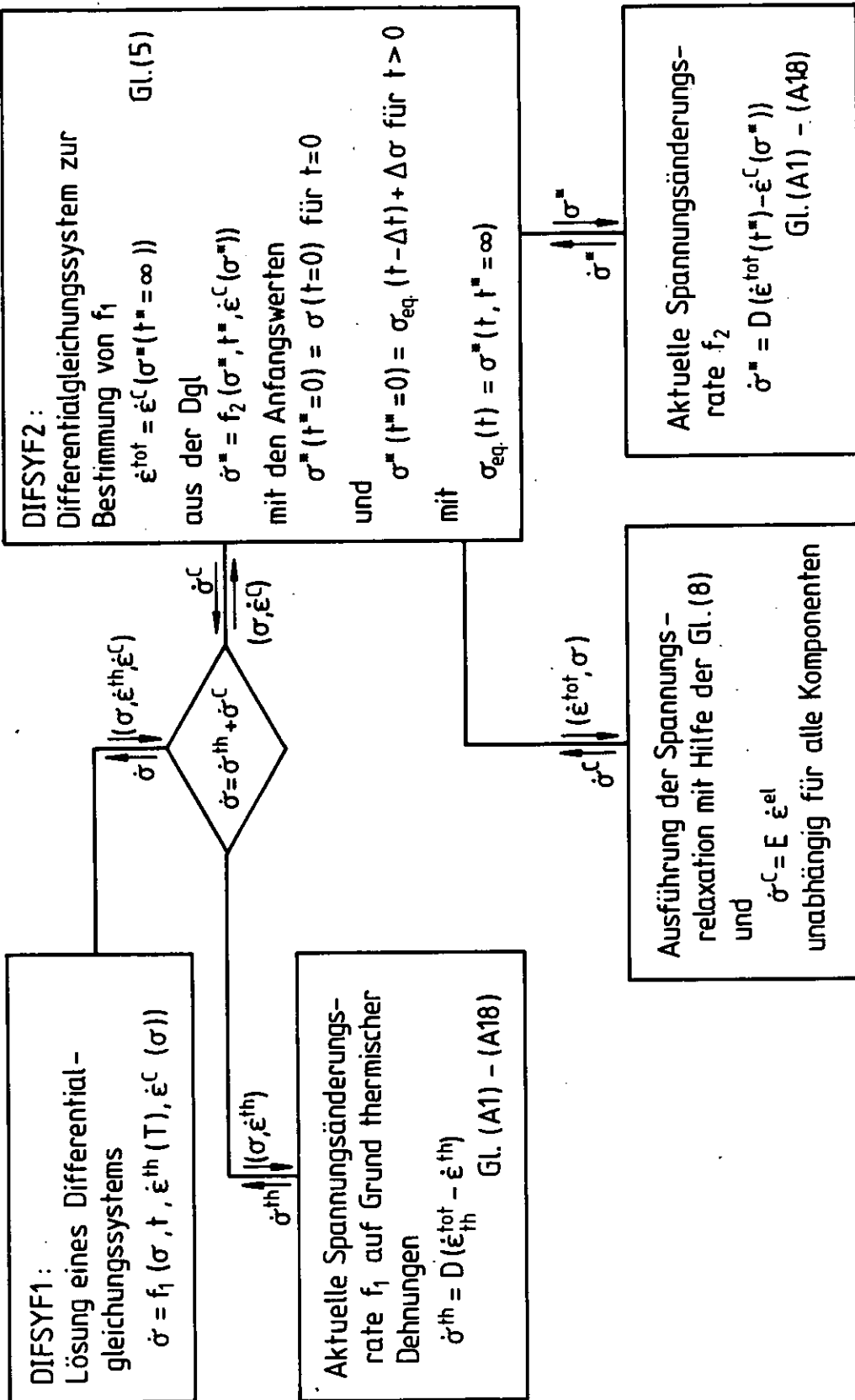
6. TESTRECHNUNGEN ZUR SPANNUNGSRELAXATION AM DICKWANDIGEN ROHR

Die theoretischen Ausführungen der vorhergehenden Abschnitte wurden für numerische Berechnungen herangezogen und zwar als erstes für das dickwandige Rohr unter gleichzeitigem Innen- und Außendruck. Für einen möglichen Anwender des hier vorgeschlagenen Rechenverfahrens ist es von Interesse zu erfahren, welche Unterschiede bestehen, wenn einerseits in einer Rechnung die verschärften Gleichgewichtsbedingungen inklusive der neu definierten Relaxation angewendet werden, und andererseits in einer Vergleichsrechnung, wie sonst üblich, Kriechdehnungen wie thermische Dehnungen behandelt werden. Ein Gefühl für den numerischen Unterschied kann durch die Berechnung eines Beispiels erfolgen.

Das gewählte Beispiel ist ein Rohr mit den folgenden Geometrie-, Belastungs- und Materialdaten:

$r_i = 50 \text{ mm}$	Innenradius
$r_a = 65 \text{ mm}$	Außenradius
$p_i = 4.2 \text{ N/mm}^2$	Innendruck
$p_a = 3.9 \text{ N/mm}^2$	Außendruck
$T_i = 860 \text{ }^\circ\text{K} - 30 \cdot t$ für die Zeit $t < 1\text{h}$	lineare Abkühlung, $[t]=\text{h}$ der Innenwand mit
$T_i = 830 \text{ }^\circ\text{K}$ für $t > 1\text{h}$	konstantem Endzustand
$T_a = 860 \text{ }^\circ\text{K}$ für $t > 0$	Außentemperatur
$E = 1.4 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$	Elastizitätsmodul
$\nu = 0.3$	elastische Poissonzahl
$\alpha = 18 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\dot{\epsilon}^c(T, \sigma) = e^{(-7.11 \cdot 10^4 / T + 30.4) \cdot \sigma^{7.04}}$	Kriechgesetz bei Verwendung der folgenden Einheiten:
$[\sigma] = \text{N/mm}^2, [T] = \text{ }^\circ\text{K}, [\dot{\epsilon}^c] = \text{h}^{-1}$	

Das gleiche Beispiel wurde in Ref⁶ mit Hilfe der Finite-Element-Methode gerechnet. Für den Vergleich mit den Rechenergebnissen aus Ref⁶ erweist es sich als nachteilig, daß die Bedingungen des ebenen Dehnungszustands nicht einheitlich eingehalten werden konnten. Während in Ref⁶ die Berechnung der Thermospannungen unter der Annahme des verallgemeinerten ebenen Dehnungszustands⁷ ausgeführt wurde, wurde für den Einfluß des Kriechens zusätzlich ein ebener Verformungszustand angenommen. Für die hier vorliegenden Rechnungen zum Rohr wurde nicht die Finite-Element-Methode verwendet, sondern eine im Anhang beschriebene, mehr analytische Methode eingesetzt. Ferner wurde für sowohl elastische als auch plastische Dehnungen ein verallgemeinerter ebener Dehnungszustand angenommen. Der Einfluß des Innen- und Außendrucks wurde in beiden Rechnungen gleich behandelt, nämlich entsprechend Ref⁸.



Flußdiagramm für die Berechnung von Spannungen unter dem gleichzeitigen
Einfluß von Temperaturänderungen und von Kriechen

Die Ausführung der Rechnungen erfolgte gemäß des umseitig abgebildeten Flußdiagramms.

Nach Ermittlung der Anfangswerte der Spannungen am dickwandigen Rohr aufgrund der unveränderlichen Belastung durch Innen- und Außendruck wird die Kontrolle im Hauptprogramm an ein Programm DIFSYP1¹⁶ übergeben. DIFSYP1 verlangt für jeden zur Ausführung anstehenden Zeitschritt $t+\Delta t$ mehrere Berechnungen der Spannungsänderungsrate unter den aktuellen Bedingungen ($\sigma, \dot{\epsilon}^{th}, \dot{\epsilon}^c$). Werden die verschärften Gleichgewichtsbedingungen nicht angewendet, so werden die Dehnraten $\dot{\epsilon}^{th}$ und $\dot{\epsilon}^c$ gleichbehandelt und zwar entsprechend der im Anhang beschriebenen Gln (A1)-(A18). In diesem Fall wird die Spannungsänderungsrate $f_1 = \dot{\sigma}^{th}$ auf direktem Wege nach konventionellen Methoden (siehe Anhang) bestimmt.

Sollen die verschärften Gleichgewichtsbedingungen berücksichtigt werden, so werden die aus den Kriechdehnraten $\dot{\epsilon}^c$ resultierenden Spannungsänderungsrate $\dot{\sigma}^c$ (Spannungsrelaxation) auf getrenntem Wege berechnet und den Spannungsänderungsrate aus thermischen Dehnraten $\dot{\sigma}^{th}$ additiv beigelegt. Für die Bestimmung der Spannungsrelaxationsrate $\dot{\sigma}^c$ muß zunächst die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} unter aktuellen Bedingungen berechnet werden. Das bedeutet die Lösung eines untergeordneten Anfangswertproblems, so daß die Kontrolle der Programmausführung an ein Unterprogramm DIFSYP2, d.i. eine Kopie des Programms DIFSYP1, übergeben wird. Der Rechenaufwand für zwei inneneinander geschachtelte Anfangswertprobleme ist jedoch geringer als zunächst vermutet werden mag. Unter den im Abschnitt 4 genannten drei Bedingungen wird das Unterprogramm DIFSYP2 nur einmal, nämlich für $t=0$ aktiviert. Unter weiterreichenden, zeitlich veränderlichen Belastungsbedingungen, also ohne die vereinfachenden drei Bedingungen aus dem Abschnitt 4, hat DIFSYP2 lediglich die Aufgabe, stetigen Veränderungen der Lösung $\sigma_{eq}(t)$ zu folgen, d.h., Anfangswert und Endwert des Problems liegen nahe beieinander. Für die Auffindung des Gleichgewichtszustands, σ_{eq} , werden für die Berechnung von f_2 wiederum die Gl. (A1)-(A18) verwendet. Diesmal jedoch in der zeitlichen Folge t^* von $t^*=0$ bis $t^*=\infty$. Für die Rechnungen am Rohr waren zusätzliche Maßnahmen der Nullstellensuche nicht erforderlich.

Nach Bestimmung des Gleichgewichtszustands, σ_{eq} , kann mit Hilfe der Relaxationsgleichungen, Gln (8), die Spannungsänderungsrate $\dot{\sigma}^c$ in einem gesonderten Unterprogramm berechnet werden und an das aufrufende Programm über DIFSYP2 an DIFSYP1 zurückgegeben werden.

Die Ergebnisse der Rechnungen sind in den Abbildungen 1.1 - 1.3 so dargestellt, daß ein direkter Vergleich zwischen der konventionell ausgeführten Rechnungsart und derjenigen mit den verschärften Gleichgewichtsbedingungen möglich ist.

Man beachte zunächst, daß der Spannungsaufbau durch Abkühlung der Rohrinnenwand nach 1 h abgeschlossen ist. Danach beginnt der Relaxationsvorgang.

Bei dem gewählten Beispiel gibt es zwischen den beiden Rechnungsarten keine größeren Abweichungen als 5 N/mm^2 . Unter verschärften Gleichgewichtsbedingungen, so zeigt das Beispiel, berechnet man in der Regel absolut höhere Spannungen. Dieses Ergebnis hängt vermutlich damit zusammen, daß gegenüber der herkömmlichen Rechnungsart durch Herausnahme aller erzwungenen Kriechdehnungsanteile im allgemeinen vermindertes Kriechen auftritt. Während bei Verwendung der konventionellen Rechnungsart alle drei Spannungskomponenten parallel zueinander relaxieren, zeigt die unabhängige Relaxation entsprechend den Gln. (8), daß Komponenten mit geringeren Spannungen nach Maßgabe des einfachen Norton'schen Kriechgesetzes über einen erheblich längeren Zeitraum abklingen (Abb. 1.1).

Bei dem gewählten Beispiel spielte die gleichzeitig berücksichtigte, primäre Belastungsart quantitativ eine untergeordnete Rolle gegenüber den Thermospannungen. Ein zweites Beispiel, das die Relaxation von Spannungsüberhöhungen an Kerben behandelt, d.h. die Relaxation von Spannungen, die durch Primärlasten verursacht wurden, wird im folgenden Abschnitt beschrieben. Die Berechnungen, die am Rohr in nahezu analytischer Form ausgeführt werden konnten, müssen bei gekerbten Proben unter Anwendung mehr numerischer Methoden wie z.B. unter Anwendung der Finite-Element-Methode vollzogen werden.

7. FINITE-ELEMENT-RECHNUNGEN AN EINER GEKERBTEN, ZYLINDRISCHEN PROBE

7.1 Einleitung

Das im vorherigen Abschnitt beschriebene Verfahren läßt sich unter Anwendung der Finite-Element-Methode in ähnlicher Weise durchführen. Gleichzeitig mit den *Rechnungen* für die zylindrische Probe mit umlaufender Kerbe (Abb. 2), wurden auch *Experimente*⁹ mit solchen Proben ausgeführt. Die Entwicklung des zugehörigen Rechenprogramms, das auch für tertiäres Kriechen ausgelegt ist, war zur Zeit des Abschlusses dieses Berichts noch nicht vollständig fertiggestellt. Die Berechnung der totalen Dehnrates $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ zum Zeitpunkt $t=0$ liegt jedoch vor. Zu einer vollständigen Rechnung unter den drei vereinfachenden Bedingungen, die im 3. Abschnitt benannt wurden, fehlt an dieser Stelle noch die Behandlung des Relaxationsproblems. Die vorhandenen Ergebnisse und die sich daraus ergebenden Schlußfolgerungen sollen an dieser Stelle jedoch schon mitgeteilt werden.

Die gekerbte, zylindrische Probe ist seit längerem Gegenstand intensiver Forschung in Bezug auf ihre Kriechfestigkeit. Das Interesse resultiert aus der paradoxen Eigenschaft dieses Probenotyps, u.U. eine höhere Kriechfestigkeit aufzuweisen, als eine glatte Vergleichsprobe mit dem gleichen Durchmesser wie die gekerbte Probe an der engsten Stelle. Erhebliche Anstrengungen sind sowohl mit mathematischen¹⁰ als auch mit experimentellen Hilfsmitteln¹⁷ zur Klärung dieses Problems eingesetzt worden. Doch obwohl das Phänomen augenscheinlich ein Ergebnis des komplexen, mehrachsigen Spannungszustands in der Nähe des Kerbgrundes ist, konnte eine befriedigende, quantitative Erklärung noch nicht vorgelegt werden¹¹.

7.2 Spezifikationen

Unsere Untersuchungen betreffen eine Probe, die aus der Nickelbasislegierung Hastelloy X gefertigt wurde und bei einer Temperatur von 1173 °K untersucht wurde. Vorauslaufende Experimente an glatten Zugproben dienten zur Ermittlung der Zeitdehnlagen für verschiedene, konstant gehaltene Belastungen. Zum Zwecke der Berechnung von Dehnraten unter aktuellen Kriechbedingungen im Probenkörper, wurden die Experimentdaten durch die folgenden Darstellungsformen^{12 13 14} angepaßt:

$$\dot{\epsilon}^c = k \left[\frac{\sigma e^{\epsilon}}{1-D} \right]^n \quad (17)$$

$$\dot{D} = \alpha \left[\frac{\sigma e^\varepsilon}{1-D} \right]^p \quad (18)$$

mit $D(t=0) = \varepsilon^C(t=0) = 0$ als Anfangswerten.

Die hier neu eingeführte skalare Funktion $D=D(t)$ soll eine Schadensakkumulation während des Kriechens beschreiben.

Die Güte der Anpassung und die Werte der Parameter k , α , n und p sind aus der Abb. 3 zu entnehmen. Für $t=0$ ist Gl. (17) mit Gl. (4) identisch, so daß die Startbedingungen des Kriechens durch das Norton'sche Kriechgesetz beschrieben werden. Für mehrachsiges Kriechen wird in den Gln. (4) und (17) die Kriechmatrix K aus Gl. (6) zusätzlich berücksichtigt.

7.3 Verformungseigenschaften der Kerbzugprobe

Ein interessantes Ergebnis der Rechnungen ist in Abb. 4 wiedergegeben. Nach Ermittlung der totalen Dehnraten $\dot{\varepsilon}^{\text{tot}}(t=0, r, z)$ nach dem im Abschnitt 4 beschriebenen Verfahren, können daraus durch Integration Verschiebungsraten berechnet werden. Die Rechnung liefert die deviatorischen Anteile der totalen Dehnraten, die unter den Voraussetzungen 1.-3. aus Abschnitt 4 für das stationäre Kriechen verantwortlich sind, so daß damit möglicherweise das langfristige Dehnverhalten der Probe abgeschätzt werden kann. Abb. 4 zeigt den durch ein Finite-Element-Netz idealisierten Materialteil in unmittelbarer Nachbarschaft des Kerbgrundes und den Verzerrungszustand aufgrund der berechneten Dehnratenverteilung. Bemerkenswert ist das Rechenergebnis, daß die Kerbe sich nicht vertieft, obwohl man möglicherweise eine starke Verjüngung der Probe durch Querkontraktion beim Kriechen erwarten würde. Außerdem urteilt man erfahrungsgemäß, daß dort, wo bereits eine Querschnittsverengung aufgetreten ist, dieses bezüglich Kriechen eine Schwachstelle darstellt, an der sich die Probe in besonderem Maße verjüngt.

Das ist offenbar bei besonders scharf geschnittenen Einkerbungen nicht der Fall. Zwar öffnet sich die Kerbe, aber der ursprüngliche Querschnitt am Kerb bleibt, abhängig von der Gültigkeit der Bedingungen des Abschnitts 4, zumindestens kurzfristig erhalten.

Die Eigenschaft, während des Kriechvorgangs einen stabilen, minimalen Querschnitt zu erhalten, ist offenbar auch entscheidend für die Kriechfestigkeit einer solchen Probe. Eine gekerbte Zugprobe, deren minimaler Querschnitt sich nicht vermindert, hat, verglichen mit einer glatten, zylindrischen Zugprobe von anfänglich gleichem Querschnitt, der sich aber vermindert, bezüglich Kriechfestigkeit einen Vorteil aufzuweisen. Man erwartet im lastkonstanten Kriechexperiment eine Kriechverfestigung deswegen, weil unter konstanter Last im engsten Querschnitt der Kerbzugprobe die Spannung erhalten bleibt, während sie sich in einer glatten

Vergleichsprobe wegen Querschnittsverengung ständig erhöht. Wir unterstützen damit eine bereits bekannte Aussage:

-Die Hauptursache für eine Kriechverfestigung ist die geringere Verformung in einer Kerbzugprobe, gerade am Kerbgrund, verglichen mit der Verformung einer glatten Probe mit der gleichen (anfänglichen) Nennspannung¹⁵.

7.4 Dehnungseigenschaften der Kerbzugprobe

Die Dehnratenverteilung $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$, die nach Integration die im vorigen Abschnitt 7.3 beschriebenen, globalen Verformungseigenschaften ergibt, soll näher untersucht werden. Sie ist in den Abb. 5.1 - 5.3, d.h. in drei Abbildungen wiedergegeben, um Details in der Nähe des Kerbgrundes vergrößert darstellen zu können.

Abb. 5.1 zeigt die Dehnratenverteilung $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ ($t=0$) im zentralen Bereich des minimalen Querschnitts. Dort existiert laut Rechnung ein Bereich in der Form eines *Doppelkegels*, in dem wegen eines äqui-dreiachsigen Spannungszustands der Gleichgewichtsspannung σ_{eq} , der aufgrund der von Mises'schen Kriechbedingung entsteht, keine Dehnbewegung stattfindet. Der Doppelkegel ist um die gleiche Achse (z-Achse) rotationssymmetrisch angeordnet wie die Kerbzugprobe selbst. Er entsteht dadurch, daß Traktionslinien der kriechwirksamen Spannung σ_{eq} , die an den Probenenden parallel zur Achse verlaufen, durch die Kerbe umgelenkt werden und dadurch allseitig gleichmäßig auf das Zentrum der Probe zugreifen.

Auf den Mantelflächen des Doppelkegels verlaufen *mehrere gegeneinander gerichtete Scherbänder*. Diese sind in der Abb. 5 durch Pfeilkreuze, die die Hauptdehnrichtungen wiedergeben, erkennbar gemacht. Diagonal zu den in den Pfeilkreuzen angegebenen Richtungen verläuft die Richtung der Scherbänder. Die Pfeilkreuze haben gleichlange Achsen, was durch die beim Kriechen geforderte Volumenkonstanz und eine Art ebene Symmetriebedingung in Umfangsrichtung bedingt ist.

Dem *ersten Scherband* kann eine Kriechporenverteilung zugeordnet werden, die an dieser Stelle experimentell beobachtet wird^{9 11}. Das Scherband umschließt den Doppelkegel und schließt oberhalb und unterhalb dieses Kegels in axialer Zugrichtung an eine Dehnratenverteilung an, so wie sie auch in einer glatten Zugprobe üblich ist. Damit wird eine Streckung bei gleichzeitiger Querkontraktion angesprochen. Das gestattet die Interpretation, daß die allgemeine axiale Streckbewegung, die sowohl der Kerbzugprobe, als auch der glatten, zylindrischen Probe eigen ist, im Falle der Kerbzugprobe durch Scherbänder um den Doppelkegel herumgelenkt wird.

Das *zweite Scherband* (siehe Fig. 5) ist vermutlich durch eine Kerböffnungs-Drehbewegung mit einem Drehpunkt in der Nähe des Kerbgrundes

zu erklären. Jedenfalls findet man in Umfangsrichtung einer solchen Drehbewegung aufgrund der Pfeilkreuze Anzeichen einer Kompression des Materials, die in der Nähe des Kerbgrundes und nochmals an den Kerbflanken deutlich hervortritt. Als Folge der Kompression kommt es im Kerbgrund quer zur Kompressionsrichtung zu einer *Expansion*, die im Probeninnern mehr oder weniger durch die *Kontraktion* des ersten Scherbandes kompensiert wird. Die nach außen, also radial gerichtete Querexpansion des zweiten Scherbandes hat die Tendenz, den Radius der Kerbzugprobe am Kerbgrund zu vergrößern. Die komprimierende Drehbewegung der Kerbflanken erzeugt nicht überall in der der Drehbewegung zugeordneten Umfangsrichtung ein komprimierendes Kriechen. Das steht vermutlich damit in Zusammenhang, daß es eine weitere Kriechbewegung innerhalb der Kerbzugprobe gibt, die mit der gerade diskutierten Drehbewegung interferiert und die sich in einem dritten Scherband manifestiert. Durch Überlagerung von beiden Bändern kommt es zu einer Trennung des zweiten und dritten Scherbandes, und zwar wird die Trennung durch einen Materialbereich vollzogen, in dem lokal kein Kriechen stattfindet.

Das *dritte Scherband* gehört ebenfalls zu einer Kerböffnungsbewegung, die aber entgegen der Drehbewegung durch Parallelverschiebung der Kerbflanken in axialer Richtung zustande kommt. Eine solche Kriechverformung steht im Zusammenhang damit, daß die Krafteinleitung an den Probenenden nicht etwa über steife Platten an den Probenenden erfolgte, sondern die Kräfte wie bei "Finite-Element"-Rechnungen üblich, über die an den Probenenden vorhandenen Knotenpunkte gleichverteilt, unabhängig voneinander eingeleitet wurden. Experimentell betrachtet (Fig. 2) wäre sogar eine am Probenende periphere Krafteinleitung, d.h. eine am Gewindeteil konzentrierte Krafteinleitung, gerechtfertigt gewesen. Dem Ansatz der Rechnung entsprechend gehört jedenfalls das dritte Scherband zu einer Abgleitbewegung des äußeren, zylindrischen Probenteils, der wegen der Kerbe in axialer Richtung, also in Zugrichtung, keinen durchgehenden Materialzusammenhalt hat.

Die Information über die lokalen Verformungen in einer Kerbzugprobe kann weiterhin ergänzt werden durch die Betrachtung des Rotationsanteils der Verschiebungen. In der Abb. 6 sind die Linien gleicher Rotation aufgezeigt, so daß Zentren von Drehbewegungen erkennbar werden. Das erste und zweite Scherband sind in der Abb. 6.1 wiederzuerkennen. Die Ausschnittsvergrößerung am Kerbgrund (Abb. 6.2) zeigt eine Verschiebungsbewegung entlang der Kerbflanke in Richtung auf den Kerbgrund, so daß damit die Frage geklärt werden kann, aus welchen Bereichen der Probe Material zur Verfügung gestellt wird, so daß die Einschnürung der Kerbe nicht stattfindet.

7.5 Vergleich mit Experimentdaten

In Ref⁹ wurde das Zeitstandexperiment mit der Kerbzugprobe mehrfach unterbrochen, um die Kerbkontur durch Projektion mit parallelem Licht photographisch auszumessen. Die Kerböffnungsbewegung und die Konstanz des Kerbquerschnitts wurden experimentell belegt (Abb. 7).

Obwohl bezüglich dieses Punktes die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment als positiv zu bewerten ist, muß doch beachtet werden; daß die berechneten Kriechdehnraten dem Betrage nach um den Faktor 70 kleiner sind als die gemessene Verschiebung der Kerbflanken im Zeitraum bis 5400 h anzeigt (Abb. 7). Der Faktor 70 ergibt sich aus einer Anpassungsrechnung der rechnerisch ermittelten Verschiebung der Kerbflanke an die experimentell ermittelte Verschiebung dieser Kerbflanke, in dem die Kriechrate global in der gesamten Probe um den genannten Faktor erhöht wurde. Das ist gleichbedeutend mit einem entsprechend erhöhten Wert der Konstanten k im Kriechgesetz, Gl. (4).

Zur weiteren Analyse dieses überraschenden Befundes wurde in einer groben Abschätzung die experimentell bestimmte Parallelverschiebung der Kerbflanke einem zylindrischen Materialteil der Probe am Kerbgrund als Elongation für 5400 h Kriechverformung zugeordnet. Die Elongation eines solchen zylindrischen Materialteils, von dem gleichen Radius wie der Radius der Probe am Kerbgrund und einer Länge, die jeweils durch die gradlinige Verlängerung der Kerbflanke nach innen angezeigt wird, ergab 100%. Geht man mit den Koordinaten, 100% und 5400h, in das Diagramm der Zeitstandkurven (Abb. 3) ein, so findet man, daß dieser Koordinatenpunkt etwa auf das Ende einer Zeitstandkurve fällt, die durch eine Nennspannung mit einem Wert σ zwischen 24.1 und 30 N/mm² gekennzeichnet ist. Das bedeutet, daß experimentell begründet, also mit Bezug auf eine glatte, zylindrische Zugprobe, für das Kriechen der Kerbzugprobe am Kerbgrund eine Nennspannung von $\sigma > 24$ N/mm² verantwortlich gemacht werden muß. Das ist eine Spannung, wie sie größenordnungsmäßig auch entsteht, wenn man die in die Kerbzugprobe eingeleitete Kraft durch ihren Querschnitt an der engsten Stelle teilt, d.s. $\sigma = 29$ N/mm².

Betrachtet man den Vorgang der Elongation des gleichen zylindrischen Materialteils, so wie er sich in Durchführung der Rechnung darstellt, so kommt man zu einem anderen Ergebnis. Zunächst erstmal berechnet man eine Elongation von nur 0.16%, d.i. eine Elongation, die nicht nur um den Faktor 70, sondern eher um einen Faktor 600 zu klein ist. Verantwortlich für eine so geringe Kriechdehnung im Bereich der Kerbe ist die in der Gl. (7) wirksame, nach von Mises berechnete, effektive Gleichgewichtsspannung σ_{eq} . Sie ist in einem großen Bereich des Probenquerschnitts an der Kerbe, d.h. im Bereich des in Abschnitt 7.4 bezeichneten Doppelkegels, identisch null. Kriechen findet somit nur im Bereich des ersten und zweiten Scherbandes statt, aber nicht in verstärktem Maße, so daß der Ausfall der Kriechrate im Doppelkegelbereich dadurch kompensiert wäre. Das führt dazu, daß die globale Kriechverformung im Bereich der Kerbe durch das Auftreten des äqui-dreiachsigen Zustands insgesamt stark reduziert ist.

7.6 Diskussion erforderlicher Folgerechnungen

Eine Klärung der Situation kann von zusätzlichen Rechnungen unter genauerer Berücksichtigung der Randbedingungen für den zeitlichen Ablauf erwartet werden. Die extremen geometrischen Bedingungen der Kerbzugprobe müssen durch entsprechenden Rechenaufwand bewältigt werden. Über die hier

vorgenommene Verbesserung hinaus, d.h. zusätzlich zur Berücksichtigung der verschärften Gleichgewichtsbedingungen, ist es für diesen Probentyp offenbar notwendig, auch die vereinfachenden Voraussetzungen 2. - 3. aus Abschnitt 4. fallenzulassen. Insbesondere muß die formverändernde Wirkung des Kriechens berücksichtigt werden, um in Übereinstimmung mit dem Experiment zu gelangen. Dieses ist das Ergebnis der folgenden *qualitativen* Überlegung:

-Der in der vorliegenden Arbeit für den Zeitpunkt $t=0$ berechnete Gleichgewichtsspannungszustand σ_{eq} ist nicht für die gesamte Lebensdauer der Kerbzugprobe gültig, sondern wird wegen der Veränderung der Probenform rückwärts beeinflußt. Bereits die jetzt vorliegende Rechnung, aber auch das Experiment (Abb. 7), zeigen deutlich, daß die Kerbe im Kerbgrund flach ausgezogen wird, so daß in idealisierender Betrachtungsweise an dieser Stelle anfangs ein Teilstück einer glatten, zylindrischen Zugprobe entsteht. Im Grenzfall einer solchen glatten Probenform, die als mittleres Teilstück der ursprünglichen Kerbzugprobe anzusehen ist, ist der Gleichgewichtsspannungszustand σ_{eq} nicht mehr äqui-dreiaxig, sondern einachsige. Bevor dieser Grenzfall sich jedoch eindeutig herausbilden kann, erhält man zwischenzeitlich eine weniger scharf geformte Kerbe. Das ist aber eine Kerbgeometrie, die von Bridgman²² im Zusammenhang mit zeitunabhängigen plastischen Verformungen ausführlich untersucht wurde. Aus theoretischen Überlegungen, die durch zusätzliche experimentelle Untersuchungen bestätigt wurden, schließt Bridgman²², daß der Spannungszustand einer ursprünglich glatten Zugprobe mit bereits durch Fließen erzeugter Einschnürung aus zwei superponierten Anteilen besteht. Der erste dieser beiden Spannungsanteile ist eine im Probenquerschnitt einachsige homogene Zugspannung. Diesem Spannungsanteil überlagert ist noch ein hydrostatischer Zugspannungsanteil mit einem Maximum auf der Probenachse und mit einem Wert null an der Stelle der stärksten Einschnürung auf der Probenoberfläche.

Es ist plausibel, daß für scharf geschnittene Kerben zunächst im wesentlichen nur der hydrostatische Spannungszustand existiert, so wie er in der vorliegenden Arbeit berechnet wurde, später jedoch, verursacht durch eine Kerbabflachung infolge der Kriechverformung, der von Bridgman erwähnte einachsige Spannungszustand sich zunehmend herausbildet. Die Existenz eines solchen einachsigen Spannungsanteils muß ebenso, wie im Abschnitt 7.5 ausgeführt, wegen der Diskrepanz (Faktor 1/70!) zwischen dem experimentellen Befund und dem Ergebnis der Rechnung (für $t=0$) gefordert werden. Der Wert des einachsigen, homogenen Spannungsanteils, gemittelt über die gesamte Lebensdauer der Kerbzugprobe, wurde durch eine einfache Rechnung ermittelt und mit $30 > \sigma > 24 \text{ N/mm}^2$ beziffert. Dieser Wert, verglichen mit dem aus Kraft pro Querschnittsfläche ermittelten Spannungsnennwert $\sigma = 29 \text{ N/mm}^2$, kann als Ausdruck der erhöhten Zeitstandfestigkeit der Kerbzugprobe gegenüber einer glatten zylindrischen Probenform mit einem Querschnitt wie an der engsten Stelle der Kerbzugprobe gewertet werden. Die *quantitative* Ausführung dieser Überlegungen soll in einer weiteren Arbeit realisiert werden.

Im Zusammenhang der Diskussion über Folgerechnungen soll außerdem noch darauf hingewiesen werden, daß die berechnete Gesamtdehnratenverteilung

$\varepsilon^{\text{tot}}(t=0)$ bisher nicht auf Eindeutigkeit geprüft wurde und eine solche Prüfung zur Absicherung der neuartigen Berechnungsmethode noch zusätzlich erfolgen sollte.

8. ZUSAMMENFASSUNG

8.1 Theoretische Ansätze

Die Eigenschaft, daß während des üblicherweise angewendeten, inkrementalen Verfahrens zur Berechnung von Kriechverformungen die Bedingungen des Kräftegleichgewichts im Bereich des transienten Kriechens nicht strikt eingehalten werden, wird mit Hilfe des physikalischen Unterschiedes zwischen Kriechdehnungen und thermischen Dehnungen erläutert. Es wird ferner gezeigt, daß die bekannten Instabilitätsprobleme der Finite-Element-Rechnungen für Kriechprobleme in ursächlichem Zusammenhang mit der Gleichbehandlung von thermischen Dehnungen und Kriechdehnungen stehen.

Fordert man die verschärften Gleichgewichtsbedingungen, d.h. die Beschränkung auf Kriechdehnraten, die keine weiteren Spannungen erzeugen, so führt diese Forderung konsequenterweise zu einer anderen Berechnungsmethode und zu einem zusätzlich zu behandelnden, assoziierten Spannungsrelaxationsproblem. Die Behandlung der Spannungsrelaxation wird deswegen nötig, weil die hier formulierten, zusätzlichen Forderungen des verschärften Kräftegleichgewichts bewirken, daß Kriechdehnungen eine elastische Wechselwirkung im Körper nicht mehr hervorrufen können, so daß damit auch der wichtige Prozess der Spannungsumlagerung nicht mehr physikalisch wirksam wird. Der Prozess der Spannungsrelaxation, der anstelle der Spannungsumlagerungen eingeführt wird, beschreibt dieselben Phänomene.

Durch die Einführung der Bedingungen des verschärften Kräftegleichgewichts wird, abgesehen von den Rechnungen zum assoziierten Spannungsrelaxationsproblem, eine Finite-Element-Rechnung nötig, die in der Gestaltung und im Aufwand einer Rechnung entspricht, wie sie auch für nicht-lineare, zeitunabhängige, also elasto-plastische Probleme üblicherweise durchgeführt wird.

Im Zusammenhang mit der Spannungsrelaxation werden Relaxationsgleichungen verwendet, die im Sonderfall eines linearen Zusammenhangs zwischen Spannung und Kriechrate, d.h. im Fall eines linearen Kriechgesetzes, aus der Theorie der linearen Visko-Elastizität bekannt sind und die in ähnlicher Form im Bereich elasto-plastischer Berechnungen als Prandtl-Reuss-Gleichungen Verwendung finden. Die Relaxationsgleichungen beschreiben im transienten Kriechbereich zusätzlich eine elastische Volumenänderungsrate, die an einen gesonderten Kriechprozess gekoppelt ist, der im Falle einer reinen Spannungsrelaxation keine Verformungen verursacht, sondern allein elastische Dehnungsgradienten abbaut.

8.2 Rechnungen am dickwandigen Rohr

Die Ausführung einer Rechnung unter verschärften Gleichgewichtsbedingungen und unabhängiger Spannungsrelaxation wurde für ein dickwandiges Rohr unternommen. Im Vergleich zu der herkömmlichen Rechenmethode zeigten sich bei dem gewählten Beispiel Abweichungen von nicht mehr als 5 N/mm^2 vorzüglich in Richtung zu höheren Spannungen. Durch die unabhängige Relaxation bekommen die Spannungskomponenten mit kleinen Spannungswerten größere und schärfer definierte Abklingzeiten. Die verwendete Rechenmethode ist ausführlich beschrieben.

8.3 Gekerbte Zugprobe

In der Frage der Kriechfestigkeit einer Kerbzugprobe können aufgrund der vorliegenden experimentellen und berechneten Ergebnisse die folgenden Aussagen gemacht werden: -Wie schon frühere Berechnungen zeigten¹⁸, ist die Hauptursache für eine erhöhte Kriechfestigkeit die geringe, radiale Dimensionsänderung der Kerbzugprobe gerade am Kerbgrund. In dem hier behandelten Beispiel ergibt sich sowohl rechnerisch als auch experimentell, daß es unter stationären Kriechbedingungen zu keiner Einschnürung am Kerbquerschnitt kommt, obwohl im Vergleich dazu beim Kriechverhalten glatter Zugproben Einschnürungen in unkontrollierter Weise entstehen und instabil wachsen können.

Die Dehnratenverteilung, auf der die berechneten Verformungseigenschaften basieren, gibt detaillierten Aufschluß über die mechanischen Vorgänge im Probeninnern:

-Die an den Probenenden eingeleiteten Kräfte, deren Traktionslinien zunächst parallel zur Probenachse verlaufen, werden durch die Kerbe in das Probeninnere umgelenkt und greifen dort allseitig gleichmäßig auf einen zentralen Punkt im Kerbquerschnitt zu. Wegen der von Mise'schen Fließbedingung und der äqui-dreiachsigen Belastungsform entsteht um diesen zentralen Punkt ein Gebiet in der Form eines Doppelkegels, in dem kein Kriechen stattfindet, obwohl auf der Kegeloberfläche komplizierte Scherbewegungen ablaufen. Die von der glatten, zylindrischen Zugprobe bekannten Dehnungen, die zur Elongation bei gleichzeitiger Querkontraktion führen, laufen in einem Band ab, das dicht um den Doppelkegel herumgeführt ist. Der Teil der in die Probe axial eingeleiteten Kräfte, deren Traktionslinien in dieser Richtung wegen der Kerbe keinen direkten Materialzusammenhang vorfinden, erzeugen nicht nur den Fließkegel, sondern erzielen gleichzeitig noch zwei weitere Wirkungen. Sie versuchen einerseits in einer Abziehbewegung den äußeren, unzusammenhängenden, zylindrischen Materialmantel abzuscheren und andererseits die Kerbe zu öffnen. Diese Kerböffnungsbewegung, verstanden als Drehbewegung mit einem Drehzentrum am Kerbgrund, komprimiert Material auf dem Umfang dieser Bewegungsrichtung, und insbesondere im Kerbgrund kommt es zu einer Materialquetschung, so daß die dort gleichzeitig stattfindende Probenquerkontraktion kompensiert wird und so der Kerbquerschnitt erhalten

bleibt. Diese Aussage ist nur im Zusammenhang mit den speziell gewählten Bedingungen dieses Rechenbeispiels zu sehen.

Obwohl die über das von Mise'sche Fließkriterium bestimmte Dehnratenverteilung als Verteilung offenbar richtig berechnet wird, so zeigt ein Vergleich mit dem Experiment, daß die vom Zeitpunkt $t=0$ extrapolierte Ablaufgeschwindigkeit für die Verformung der Probe insgesamt nicht mit dem experimentellen Befund in Übereinstimmung gebracht werden kann.

Die Ursache ist darin zu sehen, daß die vorliegende Rechnung keine Gestaltsänderungen durch Kriechen berücksichtigt. Bei konsequenter Berücksichtigung der Kriechverformungen ist eine Kerbabflachung zu erwarten, die den ursprünglich äqui-dreiaxigen, kriechwirksamen Spannungszustand $\sigma_{eq}(t=0)$ in Richtung auf den Grenzfall eines einachsigen, homogenen Spannungszustands transformiert. Weiterführende Rechnungen unter Berücksichtigung der durch Kriechen verursachten Geometrieänderungen sind erforderlich, um in quantitative Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen zu gelangen.

Ausgewählte Problempunkte konzeptioneller Art werden im Anhang B im Detail diskutiert.

LITERATURVERZEICHNIS

- 1) S. Timoshenko, J.N. Goodier
Theory of Elasticity
Mc Graw Hill, New York, 1951 p. 228-230
- 2) D.R.J. Owen, E. Hinton
Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice
Pineridge Press Ltd, Swansea, U.K., p. 276
- 3) F.K.G. Odquist
Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture
Clarendon Press, Oxford, 1966 S. 34
- 4) L. Prandtl
Proc. First Internat. Congr. Appl. Mech., Delft, p. 43, 1924
- 5) E. Reuss
Z. angew. Math. Mech 10(1930)266
- 6) G.Breitbach
Mechanische und thermische Betriebsbelastungen der Rohre
eines nuklear beheizten Röhrenspaltofens
JÜL-Spez-154, Juni 1982
- 7) ibidem Ref 1), S. 412
- 8) ibidem Ref 1), S. 59
- 9) F. Ochmann
Zeitstandverhalten gekerbter Proben aus Nickelbasislegierungen
bei 973 °K und 1173 °K Prüftemperatur in HTR-Helium
und in Luft
Dissertation an der Fakultät für Maschinenwesen
der RWTH-Aachen, Sept. 1983
- 10) D.R. Hayhurst, J.T. Henderson
Creep Stress Redistribution in Notched Bars
Int. J. mech. Sci, vol 19, pp 133-146
- 11) T.S. Liu, R.J. Fields and T.J. Delph
Creep Cavitation in the Neighborhood of Stress Concentrations
Nucl. Engineering and Design, vol 75 (1982) 415-423
- 12) L.M. Kachanov
On Time to Rupture under Creep Conditions [in Russian]
Izv. Ak. Nauk. 8 (1958) 26-31
- 13) H. Broberg
A Probabilistic Interpretation of Creep Rupture Curves
Archives of Mechanics 25, 5 Warszawa 1973, eq(c)

- 14) H. Broberg
Damage Measures in Creep Deformation and Rupture
Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, eq(30)
- 15) Shuji Taira, Rynichi Ohtani
Creep Crack Propagation and Creep Rupture of Notched Specimens
International Conference on Creep and Fatigue in Elevated
Temperature Applications
Philadelphia, Sept. 1973 and Sheffield U.K. April 1974,
contribution C 213/73
- 16) H.G. Hussels
Schrittweisensteuerung bei der Integration gewöhnlicher
Differentialgleichungen mit Extrapolationsverfahren
Diplomarbeit am Mathematischen Institut der Universität Köln,
1973
- 17) K.H. Kloos, H. Diehl
Größeneinfluß und Kerbwirkung an bauteilähnlichen
Rundstäben unter Zeitstandbeanspruchung
Zeitschrift für Werkstofftechnik 9 (1978) 359
- 18) O.C. Zienkiewicz
The Finite Element Method in Engineering Science
Mc Graw Hill London 1971, p. 374
- 19) A.M. Freudenthal and H. Geiringer
The Inelastic Continuum, Handbuch der Physik
herausgegeben von S. Flügge, Bd. VI,
Elastizität und Plastizität, Berlin 1958, S. 285
- 20) ibidem Ref 18), S. 370
- 21) ibidem Ref 19), S. 270
- 22) P.W. Bridgman
Studies in Large Plastic Flow and Fracture with Special
Emphasis on the Effects of Hydrostatic Pressure,
Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1964, p. 16

ANHANG A

BERECHNUNG VON GESAMTDEHNRATEN UND SPANNUNGsumlagerungs- RATEN AM DICKWANDIGEN ROHR UNTER DEN BEDINGUNGEN DES KRÄF- TEGLEICHGEWICHTS UND DER KOMPATIBILITÄT

Die folgende Berechnung von totalen Dehnraten und Spannungsumlagerungs-
raten am dickwandigen Rohr unter den Bedingungen des Kräftegleichgewichts
und der Kompatibilität erfolgt gemäß Ref⁷ jedoch mit der Abänderung, daß
die dortige Gl. (239) zuvor bezüglich der Zeit differenziert wird und die
dabei auftretenden thermischen Dehnraten $\alpha \dot{T}$ auch durch Kriechdehnraten $\dot{\epsilon}^c$
ersetzt werden dürfen. Die aus Ref⁷ übernommene Gleichung entspricht der
tensoriellen Ausführung der Gl. (3) und wird hier mit Gl. (A1) bezeichnet:

$$\begin{bmatrix} \dot{\sigma}_{rr} \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} \\ \dot{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr}^{tot} \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{tot} \\ \dot{\epsilon}_{zz}^{tot} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr}^c \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c \\ \dot{\epsilon}_{zz}^c \end{bmatrix} \right\} \quad (A1)$$

mit dem Elastizitätsmodul E und der elastischen Poissonzahl ν .

Die Kriechdehnungen $\dot{\epsilon}^c$ der Gl. (A1) werden nach den Gln. (4)-(6) berech-
net. Die daraus resultierenden Dehnungen

$$\dot{\epsilon}^c = \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \\ \nu & \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr}^c \\ \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c \\ \dot{\epsilon}_{zz}^c \end{bmatrix} \quad (A2)$$

sind als Zwischenergebnis im Berechnungsgang zu sehen, für das eine abge-
kürzte Bezeichnung benötigt wird. Aus den drei Gln. (A1) läßt sich die
*Differentialgleichung des Kräftegleichgewichts*¹ für axialsymmetrische
Probleme zusammenstellen, d.h. die Gleichung

$$r \frac{\partial \dot{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \dot{\sigma}_{rr} - \dot{\sigma}_{\theta\theta} = 0 \quad (A3)$$

entspricht, abgesehen von dem Faktor $E/[(1+\nu)(1-2\nu)]$ der Gleichung

$$(1-\nu)r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{rr}^{\text{tot}}}{\partial r} + (1-2\nu) \dot{\epsilon}_{rr}^{\text{tot}} + \nu r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{\text{tot}}}{\partial r} - (1-2\nu) \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{\text{tot}} + \nu r \frac{\partial \dot{\epsilon}_{zz}^{\text{tot}}}{\partial r} - r \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (\text{A4})$$

mit der Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial \dot{\epsilon}_{rr}^c}{\partial r} + \frac{\dot{\epsilon}_{rr}^c - \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c}{r} \quad (\text{A5})$$

Die Gleichung (A5) lässt sich integrieren, so daß auch

$$f(r) = \dot{\epsilon}_{rr}^c + \int_{r_i}^r \frac{\dot{\epsilon}_{rr}^c - \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c}{s} ds \quad (\text{A6})$$

bekannt ist. Mit Hilfe der Kompatibilitätsgleichungen¹

$$\dot{\epsilon}^{\text{tot}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{A7})$$

wird in Gl. (A4) die radiale Verschiebungsrate \dot{u} eingeführt. Nach einigen Umformungen ergibt sich daraus die folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(r\dot{u})}{\partial r} \right] = \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{\partial f}{\partial r} - \nu \frac{\partial \dot{\epsilon}_{zz}^{\text{tot}}}{\partial r} \right] \quad (\text{A8})$$

Die Integration der Gl. (A8) ergibt

$$\dot{u} = \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{r} \int_{r_i}^r (f - \nu \dot{\epsilon}_{zz}^{\text{tot}}) r dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (\text{A9})$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1 und C_2 sind unabhängig vom Radius jedoch nicht notwendigerweise unabhängig von der Zeit. Unter Anwendung der Gln (A7) lassen sich im nachhinein explizite Ausdrücke für die radiale und azimuthale Dehnung gewinnen.

$$\dot{\epsilon}_{rr}^{tot} = \frac{1}{1-\nu} \{ (f-\nu\dot{\epsilon}_{zz}^{tot}) - \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r (f-\nu\dot{\epsilon}_{zz}^{tot}) r dr \} + C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad (A10)$$

$$\dot{\epsilon}_{\theta\theta}^{tot} = \frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r (f-\nu\dot{\epsilon}_{zz}^{tot}) r dr + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (A11)$$

Gln. (A10) und (A11) können weiterhin zur Berechnung der Spannungsänderungsraten nach Gl. (A1) verwendet werden.

$$\dot{\sigma}_{rr} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (f-\dot{\epsilon}_{rr}^c) - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r (f-\nu\dot{\epsilon}_{zz}^{tot}) r dr + C_1 - \frac{(1-2\nu)}{r^2} \frac{C_2}{r^2} \right\} \quad (A12)$$

$$\dot{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} [f + (1-2\nu)\dot{\epsilon}_{zz}^{tot}] - \dot{\epsilon}_{\theta\theta}^c + \right. \quad (A13)$$

$$\left. \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^r (f-\nu\dot{\epsilon}_{zz}^{tot}) r dr + C_1 - \frac{(1-2\nu)}{r^2} \frac{C_2}{r^2} \right\}$$

$$\dot{\sigma}_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} f + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \dot{\epsilon}_{zz}^{tot} + 2\nu C_1 - \dot{\epsilon}_{zz}^c \right\} \quad (A14)$$

Über die totale, axiale Dehnung ϵ_{zz}^{tot} muß eine zusätzliche Annahme getroffen werden. Entsprechend den vorherrschenden axialen Randbedingungen, stehen drei Möglichkeiten zur Auswahl.

1. Die Bedingung $\dot{\epsilon}_{zz}^{\text{tot}}=0$ (Relaxationsversuch, ebene Verformung) dient der Erhaltung eines axialen Verformungszustands während der Kriechverformung
2. Die Bedingung $\dot{\epsilon}_{zz}^{\text{tot}}=\text{const}$ (Kriechen im Warmzugversuch) dient der Erhaltung der in axialer Richtung wirkenden Kraft während der Kriechverformung
3. Die Bedingung $\dot{\sigma}_{zz}=0$ (spannungskonstantes Kriechexperiment) legt nach Gl. (A14) eine Dehnratenverteilung $\dot{\epsilon}_{zz}^{\text{tot}}$ so fest, daß sich die anfänglich berechnete elastische Spannung im gesamten Querschnitt des Rohres während des Kriechens nicht mehr verändert.

Nach Festlegung der axialen Dehneigenschaften durch Auswahl einer der drei axialen Randbedingungen geht es im weiteren darum, die Integrationskonstanten C_1 und C_2 durch Angabe der radialen Randbedingungen zu berechnen. Bei einem Rohr unter konstantem Innen- und Außendruck kommen dafür die Gln.

$$\dot{\sigma}_{rr}(r=r_i) = \dot{\sigma}_{rr}(r=r_a) = 0 \quad (\text{A15})$$

in Betracht. Je nach Auswahl der axialen Randbedingung erhält man die folgenden Bestimmungsgleichungen für C_1 und C_2

zu 1. **ebener Verformungszustand**
- Relaxationsversuch

$$\begin{bmatrix} 1, & -\frac{1-2\nu}{r_i^2} \\ 1, & -\frac{1-2\nu}{r_a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr}^c - f \\ \dot{\epsilon}_{rr}^c - f + f_\Delta \end{bmatrix} \quad (r=r_i, r_a) \quad (\text{A16})$$

mit

$$f_\Delta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{1}{r_a^2} \int_{r_i}^{r_a} f r \, dr$$

zu 2. verallgemeinerter, ebener Verformungszustand
- Kriechen im Warmzugversuch

$$\begin{bmatrix} 1 & , - \frac{1-2\nu}{r_i^2} \\ 1 - \frac{\nu^2}{r_a^2} (r_a^2 - r_i^2) & , - \frac{1-2\nu}{r_a^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{rr}^c - f \\ \dot{\epsilon}_{rr}^c - f + f_\Delta \end{bmatrix} \quad (A17)$$

(r=r_i, r_a)

mit

$$f_\Delta = \frac{1}{r_a^2} \int_{r_i}^{r_a} [(1-\nu)f - \nu \dot{\epsilon}_{zz}^c] r \, dr$$

zu 3. ebener Spannungszustand
- spannungskonstantes Kriechexperiment

Die Bestimmungsgleichung für die Integrationskonstanten sind identisch mit den Gln (A17). Die Spannungsänderungsraten der Gln (A12) und (A13) werden mit Hilfe der Gl. (A14) bestimmt. Aus der letzteren ergibt sich für $\dot{\sigma}_{zz}=0$ die Bestimmungsgleichung für die axiale Dehnratenverteilung

$$\dot{\epsilon}_{zz}^{tot} = \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left\{ \dot{\epsilon}_{zz}^c - \frac{\nu}{1-\nu} f - 2\nu C_1 \right\} \quad (A18)$$

Die Gleichungen (A1) bis (A18) und Gl. (4) bilden ein System von Gleichungen, die bei Angabe eines Spannungstensors σ dazu benutzt werden können, eine Spannungsänderungsrate $\dot{\sigma}$ explizit zu berechnen. Gleichzeitig berechnet man eine Dehnratenverteilung, $\dot{\epsilon}^{tot}$, und eine Verschiebungsrate \dot{u} , die sich als Ergebnis der Kriecheigenschaften des Materials und der Zwänge der Geometrie als Antwort auf die Belastung mit der Spannungsverteilung σ einstellt. Die Kenntnis der Materialkonstanten E , ν , k , μ und n wird dabei vorausgesetzt.

Die mathematische Darstellung der Spannungsverteilungen im Rohr erfolgte durch kubische Splinefunktionen mit 11 Stützwerten. In dieser Form wurde auch die für dieses Problem notwendigen Integrationen ausgeführt.

ANHANG B

KRITISCHE EINWÄNDE ZU DEM IN DEM BERICHT DARGESTELLTEN KONZEPT UND DEREN DISKUSSION DURCH DIE AUTOREN

Teil I: Kritische Einwände zu dem dargestellten Konzept

B 1.1 Der Bericht sollte deutlicher herausstellen, daß

$$\dot{\epsilon}^{\text{tot}} = f(\sigma_{\text{eq}}) \text{ für alle } t \geq 0 \quad (\text{I.1})$$

als eine Hypothese eingeführt wird, um die Randbedingungen der Gleichungen besser zu erfüllen, als es die konventionelle FE-Methode tut. Es soll die Nützlichkeit dieser Hypothese durch konsequente Behandlung geprüft werden. Die Autoren sollten nicht behaupten, daß die konventionellen FE-Methoden "konzeptionell" falsch seien. Sie sind fehlerhaft durch die Approximation von dt durch Δt und dx durch Δx , und über die Auswirkung dieser Vergrößerung und Versuche zur Verbesserung der Verfahren kann man arbeiten.

B 1.2 Die Spannungsverteilung σ_{eq} ist nach dieser Hypothese die auf einem praktischen Weg errechnete stationäre Spannungsverteilung, die über Gl. (I.1) mit der Verteilung der Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ gekoppelt ist. Sie entspricht der Bedingung

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (\text{I.2})$$

die damit ebenfalls für alle $t \geq 0$ anzunehmen ist, was in Realität bei transienten Spannungsverläufen nicht stimmt.

Den Autoren ist diese Diskrepanz bewußt, sie wird aber nicht ausreichend behandelt. Den Differenzen $\sigma - \sigma_{\text{eq}}$ kann nicht, wie auf S. 11 oben, der Charakter von Sekundärspannungen zugewiesen werden, die keine Normalspannungsanteile an der Komponentenoberfläche haben. Bringt man z.B. auf einen Biegebalken momentan das Biegemoment auf, so kann man - auch analytisch - zeigen, daß nachfolgend durch die Relaxationsvorgänge sich die Normalspannungsverteilung an seinen Enden ändert, also durch den Übergang von σ auf σ_{eq} auch Normalspannungen geändert werden. Dieser Sachverhalt wird auch auf S. 12 von den Autoren dargestellt.

B 1.3 Die vorgelegte Hypothese führt für die Verwendung experimenteller Werkstoffdaten auf folgende Schwierigkeit:

Stoffgesetze werden aus Zeitstand- (und anderen Versuchen) abgeleitet. Diese Stoffgesetze beschreiben

$$\dot{\epsilon}^{\text{tot}} = h(\sigma, \dots) \quad (I.3)$$

Nur diese Stoffgesetze kann man vom Experimentator für FE-Rechnungen erwarten. Wenn man also das Kriechverhalten eines finiten Elementes in einer komplexen Komponente beschreiben will, muß man dessen Dehnrates zeitabhängig so beschreiben, daß verwendete Stoffgesetze an Gl. (I.3) gekoppelt werden oder in der Rechnung können keine der vorliegenden Kriechdaten verwendet werden. Das Verfahren der Autoren erfordert jedoch, daß man, z.B. mit Norton's Gleichung, statt

$$\dot{\epsilon}_z^c = \frac{3}{2} k \bar{\sigma}^{n-1} K \sigma \quad (I.3a)$$

wofür man Zeitstanddaten hat,

$$\dot{\epsilon}_z^c = \frac{3}{2} k \bar{\sigma}_{eq}^{n-1} K \sigma_{eq} \quad (I.1a)$$

schreibt (siehe Gl. 7), wofür Zeitstanddaten unabhängig von der Probengeometrie und der Spannungsverteilung nicht ermittelt werden können. Die Autoren weisen auf S. 7 selbst auf die Geometrie- und Belastungsabhängigkeit hin.

Die einfache Übernahme von einaxialen Kriechdaten aus Zeitstandversuchen für Gl. (I.1a) geht nicht, da im Experiment die Dehnrates $\dot{\epsilon}_z^{\text{tot}}$ durch σ bewirkt wird und nicht von einer davon abweichenden Spannung σ_{eq} .

Zwischen Gl. (I.1a) und (I.3a) tritt ein Fehler besonders dadurch auf, daß durch den hohen Wert von n ($5 \leq n \leq 10$ bei $T > 800^\circ\text{C}$ für Hochtemperaturlegierungen) das Kriechgesetz im transienten Bereich ($\sigma \neq \sigma_{eq}$) signifikante Abweichungen liefert, wenn nicht die tatsächlich wirksame Spannung σ in der Rechnung verwendet wird. Natürlich: in konventionellen FE-Rechnungen muß der kontinuierliche Verlauf von $\sigma(t)$ in einem finiten Volumelement durch eine Stufenfunktion approximiert werden, und das Rechenprogramm muß dadurch entstehende Fehler berücksichtigen. Jedoch ist nachzuweisen, ob der in diesem Bericht vorgeschlagene einmalige Sprung von $\sigma(0)$ direkt auf den stationären Wert σ_{eq} schon bei $t=0$ nicht mit erheblich größeren Fehlern verbunden ist.

B 1.4 Die Autoren weisen nicht nach, daß konventionelle FE-Programme bei der Berechnung der Relaxation die elastische Spannungsaufweitung tatsächlich nicht zurücknehmen. Es scheint, daß hier von falschen Prämissen ausgegangen wird. Auf S. 16 steht, daß

- "bei dem typischen Relaxationsexperiment das Volumelement komponentenweise auf eine bestimmte Dehnung fixiert ist", und "die Spannung abklingen kann, ohne daß sich die äußeren Abmessungen der Probe ändern".

Für das typische, einaxiale Relaxationsexperiment (Probenachse in z-Richtung) gilt das nicht, wie die Autoren auch auf S. 19 oben beschreiben. Es tritt bei Belastung eines Werkstoffes mit einer Poissonzahl $\nu^e < 0,5$ in r-Richtung zunächst eine Volumenaufweitung auf, die mit der Abnahme der Spannung durch den Ersatz der elastischen Dehnung durch die Kriechdehnung ϵ_z^c natürlich wieder verschwindet.

Das drückt sich in der Änderung der Querdehnung (in r-Richtung) aus:

$$\epsilon_r^{tot}(t) = -\nu^e \epsilon_z^e(t) - \nu^c \epsilon_z^c(t) \quad (I.4)$$

e: elastisch, $\nu^e < 0,5$

c: Kriechen, $\nu^c = 0,5$

Im Relaxationsversuch gilt für $t=0$ nach der momentanen Belastung mit $\sigma_z = E \epsilon_z^e$ (E: Elastizitätsmodul)

$$\epsilon_r^{tot}(0) = -\nu^e \epsilon_z^e(0) \quad (I.5)$$

für $t=\infty$ nach vollständiger Relaxation zu $\sigma_z=0$:

$$\epsilon_r^{tot}(\infty) = -\nu^c \epsilon_z^c(\infty) \quad (I.6)$$

Beim Relaxationsversuch gilt Dehnungskonstanz in Belastungsrichtung z, also

$$\epsilon_z^e(0) = \epsilon_z^c(\infty) \quad (I.7)$$

und damit für die Querdehnung bei $t=0$ und $t=\infty$:

$$\epsilon_r^{tot}(0) \neq \epsilon_r^{tot}(\infty)$$

Die Notwendigkeit einer Einführung neuer Beschreibungen (Kap. 5.1.1) und eines neuen Mechanismus (Kap. 5.1.3) ist nicht zu erkennen. Die physikalischen Interpretationen des vorgeschlagenen Mechanismus sind auch metallkundlich für alle technisch relevanten Werkstoffe unrealistisch.

Teil II: Diskussion der Kritikpunkte durch die Autoren

Die Autoren bitten um Verständnis dafür, daß ihre Antwort auf die in Anhang B, Teil I, geäußerte Kritik ausführlicher formuliert wird als die Kritikäußerungen selbst. Sie möchten damit erreichen, für den unbefangenen Leser den Ansatzpunkt der relativ knapp gehaltenen Kritikpunkte zu beleuchten und deren Konsequenzen aufzuzeigen. Die Autoren bitten auch um Verständnis dafür, daß es aufwendiger ist, sehr komplexe Zusammenhänge überzeugend offenzulegen, als in der Kritik im wesentlichen darauf hinzuweisen, daß mit den Ansätzen des Berichts konventionelles Terrain verlassen wurde.

B II.1. Welches ist die Hypothese zu dem vorliegenden Bericht und könnte man anstelle der gewählten Prämisse auch eine andere wählen?

1. *Der Bericht sollte deutlicher herausstellen, daß*

$$\dot{\epsilon}^{tot} = f(\sigma_{eq}) \text{ für alle } t \geq 0 \quad (B1)$$

als eine Hypothese eingeführt wird, um die Randbedingungen der Gleichungen besser zu erfüllen, als es die konventionelle FE-Methode tut. Es soll die Nützlichkeit dieser Hypothese durch konsequente Behandlung geprüft werden. Die Autoren sollten nicht behaupten, daß die konventionellen FE-Methoden "konzeptionell" falsch seien. Sie sind fehlerhaft durch die Approximation von dt durch Δt und dx durch Δx , und über die Auswirkung dieser Vergrößerung und Versuche zur Verbesserung der Verfahren kann man arbeiten.

Entgegen der in der Kritik gemachten Aussage bezeichnen die Autoren Gl. (B1) nicht als die der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegte Hypothese. Eine Hypothese muß in sich verständlich sein. Gl. (B1) ist das nicht, denn sie enthält eine Spannung σ_{eq} , die ohne vorherige Definition nicht bekannt ist. Deshalb wäre Gl. (B1) als Hypothese ein ungeeignetes Hilfsmittel, um den Leser in die Problematik der Kriechverformungen einzuführen.

Die Bezeichnung "konzeptionell" falsch findet sich in dem vorliegenden Bericht nicht. Es ist aber richtig, daß dem Leser ein neuartiges Konzept unterbreitet wird, das aus eindeutig definierten Voraussetzungen abgeleitet wird. Alle Ausführungen des Berichts sind unter Beachtung der von Mises'schen Kriechbedingung und der Erfüllung des für Kriechen erweiterten, kontinuumsmechanischen Kräftegleichgewichts zu sehen. Dem Leser wird empfohlen, die Begründungen zu jedem Entwicklungsschritt selbst zu prüfen. Die konzeptionellen Unterschiede zu den üblicherweise angewendeten Berechnungen sind nicht von derart einfacher Natur, daß man mit verfeinerten Zeitschritten oder impliziten Integrationsverfahren zu gleichartigen Ergebnissen gelangen würde. Der Versuch, auf diese Weise ein verbessertes Rechenergebnis zu erzielen, ist von mehreren Autoren^{2 10} ausführlich beschrieben worden. In Beantwortung des nachfolgenden

zweiten Kritikpunktes geben die Autoren zusätzliche Erklärungen zu der tatsächlich zugrunde gelegten Hypothese ab, die von ihnen im Bericht als Prämisse bezeichnet wird.

B II.2.1 Wie ist die Kriechbedingung $\dot{\sigma}=0$ als nicht widersprüchlich zu transienten Spannungsverläufen $\dot{\sigma}\neq 0$ zu verstehen?

- 2.1. Die Spannungsverteilung σ_{eq} ist nach dieser Hypothese die auf einem praktischen Weg errechnete stationäre Spannungsverteilung, die über Gl. (B1) mit der Verteilung der Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ gekoppelt ist. Sie entspricht der Bedingung

$$\dot{\sigma} = 0 \quad (B2)$$

die damit ebenfalls für alle $t \geq 0$ anzunehmen ist, was in Realität bei transienten Spannungsverläufen nicht stimmt.

Den Autoren ist diese Diskrepanz bewußt, sie wird aber nicht ausreichend behandelt.

Der vorangestellte Text kann den Eindruck erwecken, daß die Forderung gemäß Gl. (B2) uneingeschränkt gelten sollte, so daß Spannungstransiente generell ausgeschlossen wären. Das ist von den Autoren nicht beabsichtigt und kann aus dem Bericht auch nicht gefolgert werden. Aus diesem Grunde sind in der Prämisse auf S. 4 die mit $\dot{\sigma}=0$ angesprochenen Spannungen auch als *zusätzliche* oder auf S. 9 als *neue* Spannungen bezeichnet. Darüberhinaus wird die Erfüllung der Bedingung für *zusätzliche Spannungen* gemäß Gl. (B2) über einen *fiktiven* Zeitablauf t^* erreicht. Transiente Spannungsverläufe werden in dem Bericht als für die Spannungsrelaxation typisch im Kapitel 5 behandelt.

Die Forderung $\dot{\sigma}=0$ ist vielmehr ein Ausdruck dessen, daß Kriechen als *energieneutral* angesehen wird. Die in dieser Ausdrucksweise gestellte Forderung findet in jeder nach den üblichen Regeln der Finite-Element-Methode ausgeführten Kriechverformungsrechnung seine Berücksichtigung. Die Autoren möchten für die soeben gemachte Aussage einen Nachweis führen:

In dem schrittweisen Berechnungsverfahren, das in Ref. [2] als plastische Verformungsrechnung dargestellt ist und auch für Kriechberechnungen angewendet wird, werden im Fall von Totlasten die Knotenpunktskräfte während des Kriechens komponentenweise pro Zeitschritt unverändert gelassen: $\Delta f=0$. Führt man nicht eine Differenzenrechnung, sondern eine Differentialrechnung aus, so ist die entsprechende Forderung mit $\dot{f}=0$ zu bezeichnen. Die Bedingung des Kräftegleichgewichts in tensorieller Schreibweise lautet unter den gleichen Voraussetzungen:

$$B^T \dot{\sigma} + \dot{f} = 0 \quad (B3)$$

Die Änderungen der auf das Volumen bezogenen, elastischen Kräfte (d.i. $B^T \dot{\sigma}$) sind zusammen mit der Forderung $\dot{f}=0$ ebenfalls null und damit ist auch die aus der Kräfteänderung $B^T \dot{\sigma}$ mal Verschiebung u berechnete Änderung des elastischen Energieinhalts gleich null:

$$\dot{U} = \frac{1}{E} \sigma \dot{\sigma} = B^T \dot{\sigma} * u = 0 \quad (B4)$$

Die Forderung, daß das Kriechen den elastischen Energieinhalt U des Körpers nicht ändert, ist somit nicht eine Forderung, die von den Autoren des Papiers neu erhoben wird. Sie ist Bestandteil jeder der üblicherweise durchgeführten FEM-Rechnungen.

Allerdings wird die Forderung $\dot{f}=0$ -darauf wird im Zusammenhang mit den anderen Kritikpunkten noch eingegangen- am Ende jeden Zeitschritts durchbrochen. Sie wird genau dann durchbrochen, wenn der Unterschied der Dehnraten $\dot{\epsilon}^{tot} - \dot{\epsilon}^c = \dot{\epsilon}^{el}$ als Relaxation der elastischen Dehnung gewertet wird. Dabei wird die zugeordnete Spannungsänderungsrate $\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}^{el}$ nicht mehr auf Energieneutralität $\dot{f}=0$ hin geprüft. Dadurch wird das Kräftegleichgewicht auch in kleinsten Zeitschritten ohne integrale Kontrolle des dadurch verursachten Fehlers verletzt.

Darüberhinaus sagt die Gl. (B4) aus, daß, wenn die Forderung nach dem verschärften Kräftegleichgewicht erhoben wird, also $\dot{\sigma}=0$ gefordert wird, dann auch das Kriechen, in Übereinstimmung mit der üblichen Vorgehensweise, *energieneutral* verläuft. Die Prämisse $\dot{\sigma}=0$ geht nur um ein geringfügiges Maß über die konventionelle Forderung $\dot{f}=0$ hinaus.

Der Unterschied in den beiden Forderungen $\dot{\sigma}=0$ und $\dot{f}=0$ wird nunmehr durch die folgenden Aussagen erkennbar: -Die Menge aller Spannungstensoren σ , die pro Volumenelement einen gleichen elastischen Energieinhalt (das ist derjenige, der durch Kriechen nicht verändert werden kann) besitzen, ist dadurch charakterisiert, daß sie durch Drehungen des Koordinatensystems ineinander transformiert werden können.

Das konventionelle Berechnungskonzept enthält somit zwei nicht klar erkennbar definierte Rotationsfreiheitsgrade. Die Autoren dieses Berichts sind der Meinung, daß die genannten Rotationsfreiheitsgrade möglicherweise zu den bei dieser Rechnungsart üblicherweise auftretenden Oszillationen (numerische Instabilitäten) führen könnten. Sie haben daher die genannten Freiheitsgrade durch die Forderung $\dot{\sigma}=0$ für die Komponenten des Tensors σ (verschärftes Kräftegleichgewicht) klar definiert und diese ihrer Studie als Prämisse vorangestellt. Diese Studie soll zeigen, welche die Kriechberechnungen betreffenden, konzeptionellen Änderungen die verschärfte Forderung zwangsläufig hervorbringt.

Aus Gl. (B4) läßt sich eine weitere, wichtige Schlußforderung ziehen: -Wenn bei konventionellen Kriechberechnungen die Forderung nach einem *energieneutralen* Kriechen erhoben wird, $\dot{f}=0$, so bedeutet das nicht nur, daß der elastische Energieinhalt pro Volumenelement unverändert bleibt, sondern darüberhinaus auch, daß die Drehinvarianten des Spannungstensors σ während des Kriechens schon bei der konventionellen Kriechrechnung pro Zeitintervall unverändert bleiben, insbesondere die Spur. In der Invariantentheorie wird eine Zuordnung der Spur des

Tensors σ zu dem hydrostatischen Spannungszustand getroffen. Unter der Bedingung $\dot{\epsilon}=0$ bleibt im Rechengang auch die Spur von $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ unverändert (Volumenkonstanz). Da gleichzeitig dieselbe Forderung (Spur $\dot{\sigma}=0$) im üblicherweise verwendeten Kriechgesetz zusätzlich und unabhängig enthalten ist, bedeutet das gleichermaßen, daß konsequenterweise ($\dot{\epsilon}^{\text{el}} = \dot{\epsilon}^{\text{tot}} - \dot{\epsilon}^{\text{c}}$) auch die Spur von $\dot{\epsilon}^{\text{el}}$ verschwindet. Das bedeutet: -Es gibt in dem konventionellen Algorithmus keine Spannungsrelaxation eines echten hydrostatischen Spannungsanteils.

Diese Aussage ist durch die im Bericht beschriebene Rechnung für die gekerbte Zugprobe numerisch belegt: -Die elastische Spannungsverteilung, die für den Zeitpunkt $t=0$ berechnet wurde, enthält hohe, äqui-dreiachsige Spannungsanteile in der Nähe des Kerbgrundes. Bei der konventionellen Kriechrechnung bleiben diese Anteile der Spannung am gleichen Ort erhalten. In der im Bericht vorliegenden Rechnung wird jedoch dieser Spannungsanteil in Erfüllung der Forderung nach dem verschärften Kräftegleichgewicht in dem oben genannten fiktiven Zeitablauf zusammen mit anderen Spannungsanteilen umgelagert. Daraus entstehen die besonderen Bedingungen der gekerbten Zugprobe, nämlich ein kegelförmiges Gebilde im engsten Querschnitt der Probe, in dem kein Kriechen stattfindet.

Die Autoren ziehen die folgende Konsequenz: -Wenn die konventionelle Kriechrechnung eine Relaxation des hydrostatischen Spannungsanteils ausschließt, d.h. auch im Spannungsumlagerungsprozess hydrostatische Spannungszustände unberührt läßt, dann können die beiden physikalischen Phänomene Kriechen und Spannungsrelaxation nicht gleichzeitig unter denselben Voraussetzungen in einem identischen Rechenalgorithmus erschöpfend behandelt werden. Sie schlagen vor, die beiden Phänomene konzeptionell getrennt zu behandeln, und dabei zwei Stoffgesetze, ein Kriechgesetz und ein Spannungsrelaxationsgesetz, analog der Formulierung von Prandtl-Reuss in Ansatz zu bringen.

Beide vorangegangenen Kritikpunkte 1. und 2.1 und auch der nachfolgende Kritikpunkt 3 enthalten den gemeinsamen Einwand, daß die sprunghafte Veränderung der Spannung von der rein elastischen Spannung σ zur kriechwirksamen Spannung σ_{eq} zum Zeitpunkt $t=0$ nicht der *Realität bei transienten Spannungsverläufen* entspricht oder sogar *mit erheblichen Fehlern verbunden ist*. Die Autoren möchten auch zu diesem Einwand in ausführlicher Weise Stellung nehmen:

Nach den Ausführungen zu der physikalischen Bedeutung der Prämisse $\dot{\sigma}=0$ für Kriechen ist im Sinne des Kernsatzes auf S. 9 eine kriechwirksame Spannung σ_{eq} klar definiert. Die Spannung σ_{eq} ist im allgemeinen Fall von der elastischen Spannung $\sigma(t=0)$ verschieden. Das mag in der Tat die Vorstellung eines willkürlich eingeführten Sprunges der elastischen Spannung hervorrufen. Die Autoren möchten aber darauf hinweisen, daß auch von Mises die gleiche Forderung erhebt. Von Mises postuliert für das Kriechgesetz die Existenz einer Vergleichsspannung. Sie geht aus der elastischen Spannungsverteilung σ durch eine sprunghaft vollzogene Spannungsänderung zum Zeitpunkt $t=0$ durch Elimination des hydrostatischen Spannungsanteils hervor.

Für den Leser, dem die Vorgehensweise bei zeitunabhängigen plastischen Verformungsrechnungen bekannt ist, soll diese Argumentation ausgeweitet werden: -Das ideal-plastische Fließen wird durch das folgende

charakteristische Materialverhalten im Spannungsdehnungsdiagramm beschrieben

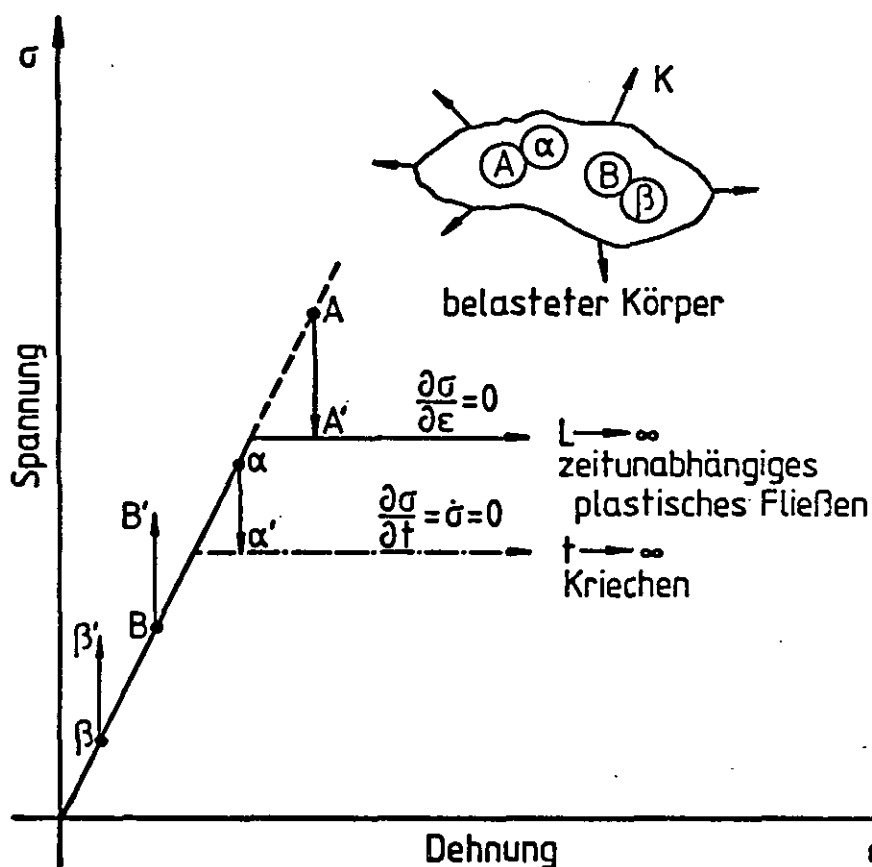


Fig. B1: Schematische Darstellung des Berechnungskonzepts bzgl. Fließen und Kriechen im Spannungs- Dehnungsdiagramm

Wird ein Körper mit äußeren Kräften K belastet, so verhält er sich zunächst linear elastisch, d.h. die Spannung steigt mit steigender Belastung im linearen Verhältnis zur Dehnung an. Nach Erreichen der Plastizitätsgrenze wird die Spannung bei weiterer Erhöhung der äußeren Last L nicht mehr erhöht, sondern nur noch die Dehnung (durchgezogene Linie, $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = 0$). Aus rein praktischen Gründen kann die Rechnung diesen Vorgang nicht direkt nachvollziehen. Stattdessen wird zunächst eine linear elastische Rechnung ausgeführt, die z.B. dem Ort A im Körper eine nicht real existente Spannung zuweist, die oberhalb der Plastizitätsgrenze auf der verlängerten elastischen Geraden liegt. Erst in einem zweiten Rechenschritt wird die Spannung im Punkte A in einem iterativen Spannungsumlagerungsverfahren bis auf die Plastizitätsgrenze abgesenkt (A'). Die umgelagerten Spannungen führen zu einer Erhöhung der Spannung am Ort B , wo der Körper noch unterhalb der Plastizitätsgrenze belastet ist (B'). Für die Spannungsumlagerung ist

die Überlegung maßgebend, daß nachgiebige, plastische Bereiche die äußeren Lasten weniger tragen, so daß die noch steifen, elastischen Teile des Körpers zusätzliche Belastungen übernehmen müssen. Wichtig ist zu vermerken, daß der Übergang der fiktiven elastischen Spannungsverteilung auf die reale Spannungsverteilung, d.i. die Fließspannungsverteilung, ohne Zeitverzögerung vollzogen wird (rechnerisch bedingter Spannungssprung).

Nach einer weitverbreiteten Vorstellung ist Kriechen einem ideal plastischen Fließen unterhalb der Plastizitätsgrenze gleichzusetzen. In dem Diagramm (Fig. B1) erfolgt eine Primärbelastung des Körpers derart, daß die Spannungen im Körper die Plastizitätsgrenze nicht erreichen. Es setzen jedoch gleichermaßen plastische Verformungsprozesse unter Ablauf von Zeit ein (strichpunktierte Linie in Fig. B1). Die modellhafte Gleichsetzung des ideal-plastischen Fließens mit dem Kriechen überführt die Fließbedingung $\partial\sigma/\partial\epsilon=0$ automatisch in die Kriechbedingung $\dot{\sigma}=0$. Der Berechnungsvorgang eines Kriechprozesses geschieht analog demjenigen des Fließprozesses: -In einem ersten Rechenschritt wird die elastische Spannungsverteilung berechnet, die sich aufgrund der äußeren Belastung K einstellt (Spannungen der Punkte α und β). In einem sich anschließenden Spannungsumlagerungsprozess wird eine von der elastischen Ausgangsspannung verschiedene Spannungsverteilung ($\alpha \rightarrow \alpha'$, $\beta \rightarrow \beta'$) erreicht, die hier analog zur Fließspannungsverteilung als Kriechspannungsverteilung (in unserer Notation σ_{eq}) bezeichnet werden soll. So wie die Fließspannungsverteilung zur Berechnung der (zeitunabhängigen) plastischen Verformungen eingesetzt wird, so wird die Kriechspannungsverteilung mittels des Kriechgesetzes zur Berechnung der (zeitabhängigen) Kriechverformungen verwendet. Die zur Ermittlung der jeweiligen verformungswirksamen Spannungsverteilungen verwendeten Gleichungssysteme sind nahezu identisch.

Die Unterschiede zwischen den beiden Gleichungssystemen bestehen lediglich darin, daß die Unbekannten der Gleichungen anders benannt sind. Anstelle von Spannungen und Dehnungen erscheinen in gleicher Position als Unbekannte Spannungsänderungsraten und Dehnraten. Außerdem wird das Fließgesetz durch das Kriechgesetz ersetzt. Aus diesen mathematischen Gegebenheiten, die exakt die Situation beschreiben, in der sich der Anwendungsrechner befindet, läßt sich schlüssig folgendes ableiten:

-Wenn die Lösung des zeitunabhängigen plastischen Gleichungssystems eine Fließspannung ergibt, so liefert dasselbe Gleichungssystem für Kriechen eine Kriechspannung und beide sind sprunghaft verschieden von der anfänglich vorhandenen, elastischen Spannungsverteilung.

Die Situation des Anwendungsrechners ist so, daß er, ohne über *explizite* zeitliche Eigenschaften des Gleichungssystems zusätzliche Voraussetzungen zu treffen, keine Wahl hat, anders vorzugehen. Ohne zusätzliche Definition des *expliziten zeitlichen* Änderungsverhaltens der den statischen Zustand beschreibenden Gleichungen kann die in Realität ablaufende, zeitabhängige Änderung der im Diagramm Fig. B1 beschriebenen Spannungen ($\alpha \rightarrow \alpha'$, $\beta \rightarrow \beta'$) nicht berechnet werden. Um sich die fehlende Information für das Spannungsänderungsverhalten zu beschaffen, sind zwei Verfahren denkbar:

1. Unter bewußter Verletzung des oben genannten Gleichungssystems (Verletzung des Kräftegleichgewichts) wird die jeweils vorhandene, elastische Spannungsverteilung als kriechwirksam postuliert
2. Bei strikter Erfüllung des vorgegebenen Gleichungssystems wird das Problem der Spannungsänderung (Relaxation) in zwei Teilschritten gelöst. *Erstens* wird der Spannungszielwert bestimmt. Da ohne Änderung von Einflußgrößen die Kriechspannungsverteilung (Gleichgewichtsspannungsverteilung σ_{eq}) stabil ist, ist dieses zugleich der Zielwert der Spannungsänderung. *Zweitens*, das spezielle Übergangsverhalten vom Spannungsanfangswert zum Spannungszielwert wird durch die explizite Angabe eines als Stoffgesetz verstandenen Relaxationsgesetzes festgelegt.

Da die Position 1. in der Literatur ausgiebig behandelt wird, fühlten sich die Autoren veranlaßt, die für sie attraktivere Position 2. in ihrem Bericht im logischen Zusammenhang ausführlich darzustellen.

Ohne Bezug zu nehmen auf die in der zeitunabhängigen Plastizitätstheorie übliche Vorgehensweise, möchten die Autoren mit einer anderen Argumentation auf die Existenz zweier zeitlich zugleich existenter Spannungsverteilungen eingehen, nämlich der vorgegebenen elastischen Spannungsverteilung und der daraus abgeleiteten Kriechspannungsverteilung. In dieser Darstellung soll das konventionelle Berechnungsverfahren nochmals ausführlich beleuchtet werden und eine Begründung dafür formuliert werden, warum die Autoren in Abweichung vom vorhandenen Konzept ihr eigenes bevorzugen:

Der zeitabhängige Spannungsumlagerungsvorgang kann auch in der konventionellen Kriechrechnung nur durch ein zusätzliches Konzept bewältigt werden. Dieses Konzept soll zunächst beschrieben werden, bevor die Autoren ihr eigenes Konzept dem gegenüberstellen:

In dem üblichen Verfahren werden für einen kleinen ersten Zeitschritt Δt zwei Voraussetzungen getroffen

1. Die für den Zeitpunkt $t=0$ berechneten elastischen Spannungen werden über das Kriechgesetz wirksam und
2. sie bleiben für das gewählte Zeitintervall Δt konstant, d.h. $\dot{\sigma}=0$.

Die darauf begründete, rein elastische Rechnung ergibt als Ergebnis der Prüfung auf Kräftegleichgewicht und Kompatibilität einen ersten Änderungsschritt in der Gesamtdehnung $\Delta \epsilon^{tot}$. Es ist wichtig, darauf hinzuweisen, daß $\Delta \epsilon^{tot}$ unter der Voraussetzung $\dot{f}=0$, wie oben ausgeführt, berechnet wurde. Es wird jetzt zum Zwecke der Spannungsrelaxation Gl. (3) dieses Berichts zu Hilfe genommen, d.h. man stellt einen Unterschied zwischen der Gesamtdehnung $\Delta \epsilon^{tot}$ und der Kriechdehnung $\Delta \epsilon^c$ pro Knotenpunkt fest und rechnet diesen mittels des Hook'schen Gesetzes in eine Spannungsänderung $\Delta \sigma$ um

$$\Delta \sigma = D (\Delta \epsilon^{tot} - \Delta \epsilon^c) \quad (B5)$$

Es ist den Autoren wichtig, darauf hinzuweisen, daß die Spannungsänderung $\Delta\sigma$ berechnet wird, ohne gleichzeitig zu prüfen, ob diese Spannungsänderung im Einvernehmen mit der Voraussetzung $f=0$ steht, die im Zusammenhang mit dem Kräftegleichgewicht gemacht wird. Es ist speziell der Dehnungszuwachs $\Delta\epsilon^C$, der nicht geprüft wird. Daher ist davon auszugehen, daß das Kräftegleichgewicht beim konventionellen Verfahren pro Zeitschritt verletzt wird. Das ist in der Literatur bekannt und unterschiedliche Gegenmaßnahmen werden angeregt [2].

Nunmehr ist eine schwierige logische Position zu bewältigen. Die berechnete Spannungsänderung $\Delta\sigma \neq 0$ steht in direktem Widerspruch zu der Voraussetzung 2., $\Delta\sigma=0$. Normalerweise wird die Voraussetzung 2. aus diesem Grunde fallengelassen, indem man die Ausgangsspannungsverteilung σ durch Superposition der Spannungsänderung $\Delta\sigma$ verändert. Die Verletzung des Kräftegleichgewichts wird damit manifestiert und zwar mit dem Vorteil, daß dadurch in einem einfachen Rechengang ein transientes Spannungsverhalten beschrieben werden kann.

An genau dieser Stelle der logischen Entwicklung des Rechenkonzepts möchten die Autoren ihre eigene Konzeption einbringen. Sie vertreten den Standpunkt, daß bei der Berechnung einer Spannungsänderung $\Delta\sigma \neq 0$, die einen logischen Widerspruch zu den Voraussetzungen erzeugt, zunächst erstmal beide Voraussetzungen in Zweifel gezogen werden müssen, d.h. auch die Voraussetzung 1. muß bezweifelt werden, nach der die elastische Spannungsverteilung im Kriechgesetz wirksam werden soll. Die Autoren sind ferner der Ansicht, daß die Forderung nach einer (bezüglich der elastischen Energie) *energieneutralen* Eigenschaft des Kriechens eine physikalisch richtige Voraussetzung darstellt, die nicht, auch nicht teilweise, fallengelassen werden darf. Die Voraussetzung 2. darf nicht fallengelassen werden, weil sie die Voraussetzung $f=0$ (Energieneutralität) impliziert. Wird dagegen die Voraussetzung 1. fallengelassen, so kann man die Frage nach der im Kriechgesetz wirksamen Spannung beantworten: Die kriechwirksame Spannung ist nicht die vorgegebene elastische Spannung, sondern die Kriechspannung und zwar schon zum Zeitpunkt $t=0$.

Die obige Überlegung sollte klar verständlich machen, daß an dieser Stelle der konzeptionellen Entwicklung eine Entscheidung getroffen werden muß.

Man kann offenbar transiente Spannungsverläufe beschreiben *erstens* unter Verletzung des Kräftegleichgewichts oder *zweitens* nicht unter der Verletzung des Kräftegleichgewichts, dann aber nur über den logischen Umweg über eine Berechnung der reinen Kriechverformungen, von denen die Spannungsrelaxation abgetrennt ist.

In Zusammenfassung der Ausführung zum Kritikpunkt 2.1 stellen die Autoren fest: -Die Gl. (B2) ist die mathematische Formulierung der Prämisse auf S. 4 des Berichts und beinhaltet die konventionelle Forderung nach Energieneutralität des Kriechens. Kriechen und Spannungsrelaxation sind konzeptionell getrennt. Speziell für Kriechen gilt Energieneutralität und die Annahme $\dot{\sigma}=0$, während für die Berechnung des transienten Spannungsänderungsverhaltens ($\dot{\sigma} \neq 0$) ein Relaxationsgesetz zusätzlich benötigt wird.

Die in der Kritik abgegebene Darstellung der Kriechbedingung $\dot{\sigma}=0$ als zeitlich vorverlagerte Stationaritätsbedingung kann ohne das von den Autoren

dargelegt Konzept a priori nicht verstanden werden. Eine derart vereinfachte Darstellung führt vielmehr zu Mißverständnissen.

Die Autoren hoffen, hiermit die kritisierte nicht ausreichende Behandlung der *Diskrepanz* zwischen transientem Spannungsverlauf und der kriechwirksamen Spannung jetzt *ausreichend behandelt* zu haben.

B 11.2.2 Welche speziellen Eigenschaften sind an den Endflächen eines Biegebalkens zu beachten?

2.2. Den Differenzen $\sigma - \sigma_{eq}$ kann nicht, wie auf S. 11 oben, der Charakter von Sekundärspannungen zugewiesen werden, die keine Normalspannungsanteile an der Komponentenoberfläche haben. Bringt man z.B. auf einen Biegebalken momentan das Biegemoment auf, so kann man - auch analytisch - zeigen, das nachfolgend durch die Relaxationsvorgänge sich die Normalspannungsverteilung an seinen Enden ändert, also durch den Übergang von σ auf σ_{eq} auch Normalspannungen geändert werden. Dieser Sachverhalt wird auch auf S. 12 von den Autoren dargestellt.

Der Differenz der Spannungsverteilungen $\sigma - \sigma_{eq}$ wird nicht der Charakter einer Sekundärspannungsverteilung zugewiesen, sondern sie hat diese Eigenschaft im Sinne der Vorschriften für die Berechnung von σ_{eq} und σ . Das ist leicht einsichtig, denn beide Spannungsverteilungen unterliegen zusammen mit den elastischen Gleichungen den gleichen Randbedingungen. Die Differenz der beiden Spannungsverteilungen hat somit keine nach außen gerichteten Normalspannungen und das ist die typische Eigenschaft einer Sekundärspannung.

Das angeführte Beispiel des Biegebalkens ist kein einfach zu diskutierendes Beispiel mehr, wenn zusätzlich Randeffekte berücksichtigt werden müssen. An den Enden des Biegebalkens kann es unzweideutig nur eine Spannungsverteilung geben und das ist diejenige, die durch die gerade vorhandene Kräfteverteilung aufgeprägt wird. Kräfteumlagerungen sind nur im Rahmen der integralen Bedingung eines konstanten Biegemoments zulässig. Damit ändert sich die Gleichgewichtsspannungsverteilung σ_{eq} an den Endflächen, die in Normalenrichtung identisch ist mit der dort aufgeprägten, elastischen Spannungsverteilung σ genau so, wie sich bei konstantem Biegemoment die Verteilung der äußeren Kräfte ändert (Dazu sind die auf S. 13 des Berichts genannten drei Bedingungen zu beachten).

Wenn an den Endflächen des Biegebalkens in Normalenrichtung der Körperoberfläche $\sigma = \sigma_{eq}$ gilt, so darf man daraus noch nicht eilfertig schließen, daß die Kompatibilitätsbedingung, die auf S. 12 des Berichts für den Biegebalken ausführlich diskutiert wird, dadurch verletzt ist. Kriechen hat durch die Forderung nach Volumenkonstanz stets einen drei-dimensionalen Charakter. Auch wenn an den Endflächen die Normalkomponente der elastischen Spannung σ und diejenige der kriechwirksamen Spannung σ_{eq} identisch ist, sind für das Kriechen an den Endflächen die von null verschiedenen, übrigen Komponenten des Spannungstensors σ_{eq} zu berücksichtigen. Dadurch wird nach Abzug des hydrostatischen Anteils des Spannungstensors σ_{eq} eine im gesamten Biegebalken kompatible Kriechverformung sichergestellt. Die genannte Eigenschaft ist im Kriechgesetz Gl.

(7) enthalten, da die Kriechmatrix K nur deviatorische Anteile vermittelt.

In zusammenfassender Beantwortung des Kritikpunktes 2.2 kann gesagt werden: -Die Relaxation des Spannungsanteils $\sigma - \sigma_{eq}$ im Volumen des Biegebalkens verändert auch die Normalspannungsverteilung an den Endflächen des Biegebalkens und damit die Verteilung der äußeren Kräfte. Der spezielle Belastungsfall durch ein konstantes Biegemoment läßt eine durch die Relaxation verursachte Änderung der Normalspannungsverteilung an den Endflächen zu.

B 11.3 Ist die Beschreibung der Gesamtdehnrate durch ein experimentell bestimmtes Stoffgesetz möglich?

3. Die vorgelegte Hypothese führt für die Verwendung experimenteller Werkstoffdaten auf folgende Schwierigkeit:

Stoffgesetze werden aus Zeitstand- (und anderen Versuchen) abgeleitet. Diese Stoffgesetze beschreiben

$$\dot{\epsilon}^{tot} = h(\sigma, \dots) \quad (B6)$$

Nur diese Stoffgesetze kann man vom Experimentator für FE-Rechnungen erwarten. Wenn man also das Kriechverhalten eines finiten Elementes in einer komplexen Komponente beschreiben will, muß man dessen Dehnrate zeitabhängig so beschreiben, daß verwendete Stoffgesetze an Gl. (B6) gekoppelt werden oder in der Rechnung können keine der vorliegenden Kriechdaten verwendet werden. Das Verfahren der Autoren erfordert jedoch, daß man, z.B. mit Norton's Gleichung, statt

$$\dot{\epsilon}_z^c = \frac{3}{2} k \bar{\sigma}^{n-1} K \sigma \quad (B6a)$$

wofür man Zeitstanddaten hat,

$$\dot{\epsilon}_z^c = \frac{3}{2} k \bar{\sigma}_{eq}^{n-1} K \sigma_{eq} \quad (B1a)$$

schreibt (siehe Gl. (7)), wofür Zeitstanddaten unabhängig von der Probengeometrie und der Spannungsverteilung nicht ermittelt werden können. Die Autoren weisen auf S. 7 selbst auf die Geometrie- und Belastungsabhängigkeit hin.

Die einfache Übernahme von einaxialen Kriechdaten aus Zeitstandversuchen für Gl. (B1a) geht nicht, da im Experiment die Dehnrate $\dot{\epsilon}_z^{tot}$ durch σ bewirkt wird und nicht von einer davon abweichenden Spannung σ_{eq} .

Zwischen Gl. (B1a) und (B3a) tritt ein Fehler besonders dadurch auf, daß durch den hohen Wert von n ($5 \leq n \leq 10$ bei $T > 800^\circ\text{C}$ für Hochtemperaturlegierungen) das Kriechgesetz im transienten Bereich ($\sigma \neq \sigma_{eq}$) signifikante Abweichungen liefert, wenn nicht die tatsächlich wirksame Spannung σ in der Rechnung verwendet wird. Natürlich: in konventionellen FE-Rechnungen muß der kontinuierliche Verlauf von $\sigma(t)$ in einem finiten Volumelement durch eine Stufenfunktion approximiert werden, und das Rechenprogramm muß dadurch entstehende Fehler berücksichtigen. Jedoch ist nachzuweisen, ob der in diesem Bericht vorgeschlagene einmalige Sprung von $\sigma(0)$ direkt auf den stationären Wert σ_{eq} schon bei $t=0$ nicht mit erheblich größeren Fehlern verbunden ist.

Im Falle der Gl. (B6) müssen die Autoren den darin enthaltenen Vorstellungen direkt widersprechen. Es ist nach *allgemeinem Verständnis* nicht üblich, die Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ eines komplexen Bauteils durch ein Stoffgesetz zu beschreiben. Nach *allgemeinem Verständnis* ist $\dot{\epsilon}^{tot}$ die auf Kompatibilität und Kräftegleichgewicht geprüfte Dehnrate, in der die speziellen Belastungs- und Geometrieeigenschaften eines komplexen Bauteils enthalten sind. Wäre es dem Experimentator möglich, die Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ mittels eines Stoffgesetzes zu beschreiben, so wären damit kontinuumsmechanische Berechnungen generell überflüssig geworden. Dem Leser soll mit der sowohl im vorangegangenen Satz, als auch in den entsprechenden Sätzen auf Seite 7 gewählten konjunktiven Ausdrucksform angezeigt werden, daß eine stoffgesetzmäßige Beschreibung der Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ keinen realistischen Hintergrund hat.

Die Gl. (B1a) ist fragmentarisch zitiert. Die vollständige Gl. (7) bedeutet, daß mit dieser Gleichung die Gesamtdehnrate $\dot{\epsilon}^{tot}$ und nicht die Kriechdehnrate beschrieben wird. Wie bereits ausgeführt, wäre eine stoffgesetzmäßige Beschreibung einer Gesamtdehnrate unsinnig. Die vollständige Gl. (7) bedeutet ferner, daß mit dem dort verwendeten Symbol $\dot{\epsilon}^c(\sigma_{eq})$ nicht die Kriechdehnrate, sondern die mathematische Funktion, die das Kriechgesetz darstellt, angesprochen wird. Gl. (7) liefert die Antwort auf die Frage: Welches ist die im Kriechgesetz $\dot{\epsilon}^c(\sigma)$ wirksame Spannung, wenn die Gesamtdehnrate aus kontinuumsmechanischen Rechnungen schon bekannt ist?

Das von der Kritik nochmals angesprochene Problem zweier simultan existierender Spannungsverteilungen wurde bereits im Kritikpunkt 2.1 ausführlich diskutiert.

B II.4.1 Nehmen konventionelle FE-Rechnungen die elastische Volumenaufweitung bei Berechnung der Relaxation zurück?

4.1 Die Autoren weisen nicht nach, daß konventionelle FE-Programme bei der Berechnung der Relaxation die elastische Spannungsaufweitung tatsächlich nicht zurücknehmen.

Wie bereits ausgeführt, verändert die konventionelle FE-Rechnung mehrachsige hydrostatische Spannungsanteile nicht. Im allgemeinen mehrachsigen Spannungszustand ist der hydrostatische Spannungsanteil der Ausgangsspannungsverteilung klar definiert. Für den einachsigen Relaxationsversuch ist der hydrostatische Spannungsanteil nicht einheit-

lich definiert. In Ref. [22] (S. 22) werden zwei alternative Definitionen dafür angegeben und diskutiert:

1. Der hydrostatische Spannungsanteil berechnet sich zu $1/3$ der Spur des Spannungstensors σ ($= 1/3 \sigma_z$).
2. Bei zwei gleich großen Normalspannungskomponenten wird für die dritte Raumrichtung eine gleich große Spannungskomponente hinzugefügt, so daß alle 3 zusammen einen hydrostatischen Spannungszustand beschreiben. Bezüglich der einachsigen Zugprobe ergibt sich damit ein hydrostatischer Anteil, der null ist.

Die der FE-Rechnung zugrunde gelegte Definition und deren Wirkung bezüglich *einachsiger* Spannungszustände läßt sich aus den Gln. (4)-(6) ablesen. In der einachsigen Zugprobe ist eine der angelegten Spannung σ entsprechende Volumenaufweitung vorhanden. Sie berechnet sich ähnlich wie die Änderungsrate nach Gl. (11) als Produkt aus dem reziproken Kompressionsmodul K und einem Drittel der angelegten Spannung, d.i. $\sigma/3$, das in diesem Sinne als hydrostatischer Spannungsanteil der einachsigen Zugprobe zu bezeichnen ist. Die Spannung $\sigma/3$ wird entsprechend der von Mises'schen Vorschrift von der elastischen Spannung abgezogen, um eine für das Kriechgesetz kriechwirksame Deviatorspannung zu erhalten. Damit beträgt die kriechwirksame Spannung nach Ausführung der Gl. (6) zunächst $2/3 \sigma$.

Nun ist jedoch das Kriechgesetz Gl. (4) so konzipiert, daß für die aus den Tensoren σ und ε gewonnenen Effektivwerte $\bar{\sigma}$ und $\bar{\varepsilon}$ stets das *einachsige* formulierte Norton'sche Kriechgesetz $\dot{\bar{\varepsilon}} = k \bar{\sigma}^n$ gilt. Außerdem sind die Effektivwerte $\bar{\sigma}$ und $\bar{\varepsilon}$ so definiert, daß sie im Grenzfall eines *einachsigen* Spannungszustands auch den Wert der *einachsigen* Spannung bzw. Dehnung annehmen. Das Ergebnis dieser Kette von Forderungen ist der Vorfaktor $3/2$ in Gl. (4). Damit wird im Falle *einachsiger* Spannungszustände die von Mises'sche Forderung (Faktor $2/3$ in Gl. (6)) vollständig rückgängig gemacht. Anders als im mehrachsigen Fall, wo der hydrostatische Spannungsanteil, weil kriechunwirksam, per Kriechgesetz eliminiert wird, wird er im einachsigen Fall mit demselben, aber entarteten Kriechgesetz ignoriert.

Zusammenfassend läßt sich die im Titel B II.4.1 formulierte Frage für einachsige Spannungszustände wie folgt beantworten: -Die Relaxation per einachsigem Kriechgesetz nimmt die Spannung σ und damit auch die elastische Volumenaufweitung $\sigma/(3 \cdot K)$ vollständig zurück.

Die Vorgehensweise ist im Sinne einer phänomenologischen Beschreibung der experimentell bestimmten Spannungs- Dehnungseigenschaften einer einachsigen Zugprobe *akzeptabel*. *Nicht akzeptabel* ist das zugrunde gelegte Konzept des Kriechens, das die Spannungsrelaxation bzw. die Rücknahme des elastischen Volumens bewirken soll. Es bereitet Verständnisschwierigkeiten, wenn ein Kriechprozess, dessen wesentliche Eigenschaft es ist, Volumen zu erhalten, zur Tilgung des elastischen Volumens der einachsigen Zugprobe herangezogen wird. Es bereitet ferner Verständnisschwierigkeiten, wenn der als volumenerhaltend ausgewiesene Kriechprozess im Falle einachsiger Spannungszustände elastisches Volumen tilgt, die Rücknahme elastischen Volumens im Falle mehrachsiger Spannungszustände gleichermaßen jedoch nicht bewirken kann.

Das Verständnis der Autoren ist dahingehend, daß nicht notwendigerweise allein Kriechen die Ursache für die Spannungsrelaxation ist. Es gibt eine Reihe von anderen Spannungsrelaxationsprozessen bis hin zur Mikroriß- oder Porenbildung, die auch die Relaxation dreiachsiger, hydrostatischer Spannungsanteile bewirken. Wenn aber, wie bisher praktiziert, das gleiche Stoffgesetz sowohl für die Relaxation, als auch für das Kriechen Verwendung finden soll, dann muß zugunsten eines konzeptionell einwandfreien Vorgehens die phänomenologische Beschreibung bzw. der Algorithmus zur Berechnung der Spannungsrelaxation anders gefaßt werden. (siehe Abschnitt 5.1.3).

B 11.4.2 Wie wird bei ingenieurmäßigen Anwendungsfällen eine vereinfachte Relaxationsberechnung durchgeführt?

4.2 *Es scheint, daß hier von falschen Prämissen ausgegangen wird. Auf S. 16 steht, daß*

- *"bei dem typischen Relaxationsexperiment das Volumenelement komponentenweise auf eine bestimmte Dehnung fixiert ist", und "die Spannung abklingen kann, ohne daß sich die äußeren Abmessungen der Probe ändern".*

Für das typische, einaxiale Relaxationsexperiment gilt das nicht, wie die Autoren auch auf S. 19 oben beschreiben.

Im Kritikpunkt 4.2 wird die Meinung geäußert, daß *möglicherweise* von falschen Prämissen ausgegangen wird. Im Zusammenhang mit dem danach zitierten Text von S. 16 des vorliegenden Berichts wird diese Äußerung auch von den Autoren unterstützt. Die reine Spannungsrelaxation, wie sie in praxisnahen Ingenieurrechnungen oft angewendet wird, ist je nach Genauigkeitsanforderung an die Rechnung *möglicherweise* eine unzureichende Maßnahme zur Bewältigung des Relaxationsproblems. Beide Abschnitte des Berichts 5.1.1 und 5.1.2 beschäftigen sich mit praktikablen Rechenalgorithmen, über die die Autoren lediglich referieren.

B 11.4.3 Warum ist es notwendig, neue Mechanismen vorzuschlagen, wenn herkömmliche Mechanismen eine angeblich ausreichende Beschreibung liefern?

4.3 *Es tritt bei Belastung eines Werkstoffes mit einer Poissonszahl $\nu^e < 0,5$ in r-Richtung zunächst eine Volumenaufweitung auf, die mit der Abnahme der Spannung durch den Ersatz der elastischen Dehnung durch die Kriechdehnung ϵ_z^c natürlich wieder verschwindet.*

Das drückt sich in der Änderung der Querdehnung (in r-Richtung) aus:

$$\epsilon_r^{tot}(t) = -\nu^e \epsilon_z^e(t) - \nu^c \epsilon_z^c(t) \quad (B7)$$

e: elastisch, $\nu^e < 0,5$

c: Kriechen, $\nu^c = 0,5$

Im Relaxationsversuch gilt für $t=0$ nach der momentanen Belastung mit $\sigma_z = E \epsilon_z^e$ (E : Elastizitätsmodul)

$$\epsilon_r^{tot}(0) = -\nu^e \epsilon_z^e(0) \quad (B8)$$

für $t=\infty$ nach vollständiger Relaxation zu $\sigma_z=0$:

$$\epsilon_r^{tot}(\infty) = -\nu^c \epsilon_z^c(\infty) \quad (B9)$$

Beim Relaxationsversuch gilt Dehnungskonstanz in Belastungsrichtung z , also

$$\epsilon_z^e(0) = \epsilon_z^c(\infty) \quad (B10)$$

und damit für die Querdehnung bei $t=0$ und $t=\infty$:

$$\epsilon_r^{tot}(0) \neq \epsilon_r^{tot}(\infty)$$

Die Notwendigkeit einer Einführung neuer Beschreibungen (Kap. 5.1.1) und eines neuen Mechanismus (Kap. 5.1.3) ist nicht zu erkennen. Die physikalischen Interpretationen des vorgeschlagenen Mechanismus sind auch metallkundlich für alle technisch relevanten Werkstoffe unrealistisch.

Um den Ablauf der Gln. (B7) - (B10), d.h. die Querkontraktion der einachsigen Zugprobe zu ermöglichen, muß die Abnahme der Spannung durch den Ersatz der elastischen Dehnung durch die Kriechdehnung ϵ_z als Ursache für die Spannungsrelaxation postuliert werden. Die Autoren bemerken hierzu, daß das gleiche Postulat den Gln. (8) auf S. 17 ihres Berichts zugrunde liegt.

Die Relaxationsgleichungen (8) gehören in die Kategorie der gegenwärtig praktikablen Rechenmethoden und werden insoweit von den Autoren akzeptiert.

Trotzdem muß auf gewisse Inkonsistenzen hingewiesen werden, die im Zusammenhang mit den speziellen Voraussetzungen für volumenkonstantes Kriechen als ausschließliche Ursache der Spannungsrelaxation entstehen: -Das für die Relaxation eines einachsigen Spannungszustands postulierte Verfahren muß für dreiaxiale Spannungszustände verallgemeinert werden können. Aus Symmetriegründen muß, wenn der z -Achsenrichtung eine so geartete Spannungsrelaxation zugebilligt wird, für den Allgemeinfall (nicht einachsige Zugprobe) auch den anderen beiden Raumrichtungen mit gleichgearteter Begründung eine gleichartige, achsenunabhängige Spannungsrelaxation zuge-

billigt werden. Spätestens nachdem diese Art der Spannungsrelaxation für die dritte Raumrichtung postuliert wurde, muß festgestellt werden, daß die von Mises'sche Kriechbedingung, d.h. die Erhaltung der Volumenkonstanz für Kriechen, keine Berücksichtigung gefunden hat.

Die prinzipielle Aussage der vorherigen Ausführungen kann auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

-Wenn man aufgrund des Kriechgesetzes verlangt, daß der kriechende Körper sich wie eine *inkompressible Flüssigkeit* verhält, dann kann das Kriechen an keiner Stelle des Körpers die Ursache für einen *volumenverändernden Prozess* sein. Die Relaxation eines hydrostatischen Spannungszustands ist ein solcher *volumenverändernder Prozess*.

Die Autoren schließen daraus, daß das volumenerhaltende Kriechen nicht als ausschließliche Ursache für die Spannungsrelaxation herangezogen werden kann. Sie wenden sich daher den klassischen, d.h. den Prandtl-Reuss Gleichungen zu. Diese besagen, daß nur die Spannungsdeviatoren achsenunabhängig relaxieren dürfen, während für die Relaxation des hydrostatischen Spannungsanteils eine zusätzliche Definition zu erfolgen hat. Speziell bezüglich der Relaxation des hydrostatischen Spannungszustands muß die generelle Forderung nach der Volumenkonstanz aus logischen Gründen zwangsläufig eingeschränkt werden, und zwar nach Meinung der Autoren folgendermaßen:

-Volumenkonstanz bedeutet nicht allein die integrale Volumenkonstanz des Ganzkörpers, sondern im Zusammenhang mit einem Stoffgesetz stets die Erhaltung jedes differentiellen Teilvolumens. In einem speziell ausgewählten hydrostatisch belasteten Volumelement, das relaxieren soll, muß notwendigerweise die volumenerhaltende Eigenschaft des Kriechgesetzes ausgesetzt werden. Um die Volumenerhaltung aller übrigen Elemente zu gewährleisten, soll das Kriechgesetz 'dort weiterhin gelten. Die Folgewirkung der lokalen Volumenänderung eines Elements äußert sich als Volumenänderung des Ganzkörpers bei gleichzeitiger Volumenerhaltung aller übrigen Volumelemente. In der Weise dargestellt, bedingt das Konzept die Vorstellung eines Stroms, wobei dieser entweder ein Materiestrom oder der dazu komplementär fließende Leervolumenstrom sein kann. Die Vorstellungen erwachsen auf der Basis einer kontinuumsmechanischen Beschreibung des Materialverhaltens und haben zunächst keinen *metallkundlichen* Bezug. Der Allgemeinfall des im Körper kontinuierlich verteilten hydrostatischen Spannungszustands wird durch Superposition der beschriebenen Strömungsbilder gelöst.

Das dargestellte Konzept ist mathematisch äquivalent zum Problem der Wärmeströmung mit verteilten inneren Wärmequellen (Poissongleichung). Analoge Größen sind die der Relaxation zugeordnete elastische Volumenänderung und die lokale Änderung des Wärmeinhalts.

Diese neuartige Konzeption der Spannungsrelaxation wird von den Autoren im Kapitel 5.1.3 andeutungsweise beschrieben. Sie ist dem Problemkreis der Thermo-Elastizität zuzuordnen, wo die Eigenschaften von Wärmeströmungen mit ihren Quellen- und Senkenverteilungen an die elastischen Gleichungen zur simultanen Berechnung angekoppelt sind. Es ist den Autoren bewußt, daß der Rechenaufwand für eine praktische Anwendung erhöht wird und daß zur Realisierung eines solchen Konzepts eine experimentelle Verifikation benötigt wird. Eine Spannungsrelaxation dieser Art ist ein

Ganzkörperproblem, das sich nicht allein auf der Ebene der Stoffgesetze lösen läßt. Zur experimentellen Verifikation müssen die Relaxationseigenschaften eines Körpers als von seiner Geometrie abhängig nachgewiesen werden.

Die Autoren stellen abschließend fest, daß eine in sich konsistente Beschreibung der Relaxation eines hydrostatischen Spannungszustands auf der Basis eines volumenerhaltenden Kriechgesetzes noch erarbeitet werden muß. Die an einachsigen Spannungszuständen orientierten, vereinfachten Betrachtungen der Gleichungen sind in diesem Sinne nicht verwertbar. Das neu entwickelte Konzept ist *physikalisch* fundiert und wegen des bereits vorhandenen Algorithmus rechnerisch durchführbar, also auch nicht *unrealistisch*.

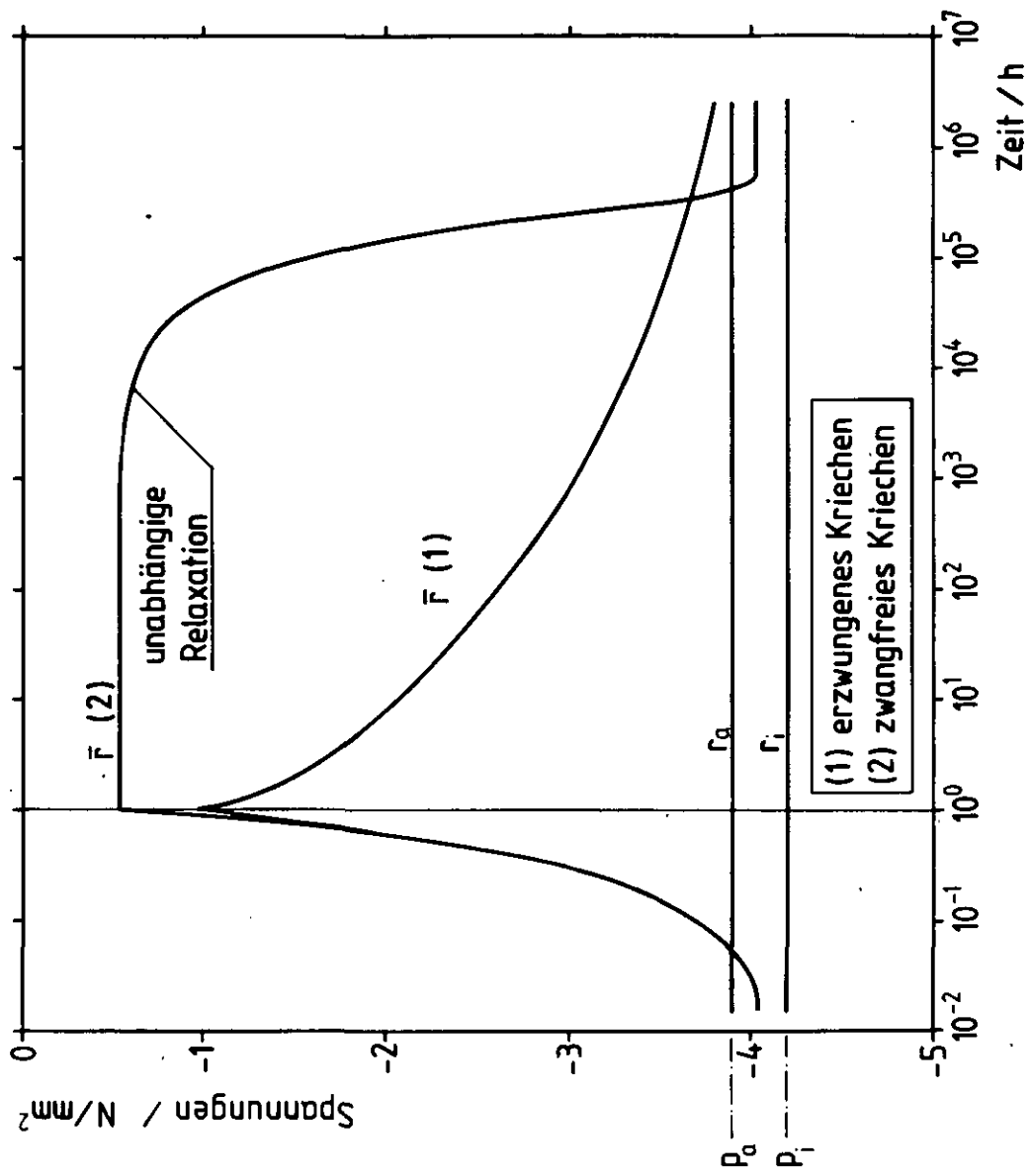


Abb.1.1: Verlauf der Radialspannungen am Rohr für drei
 Aufpunkte (mit Radien $r = r_i$, r_a und $\bar{r} = (r_i + r_a) / 2$)

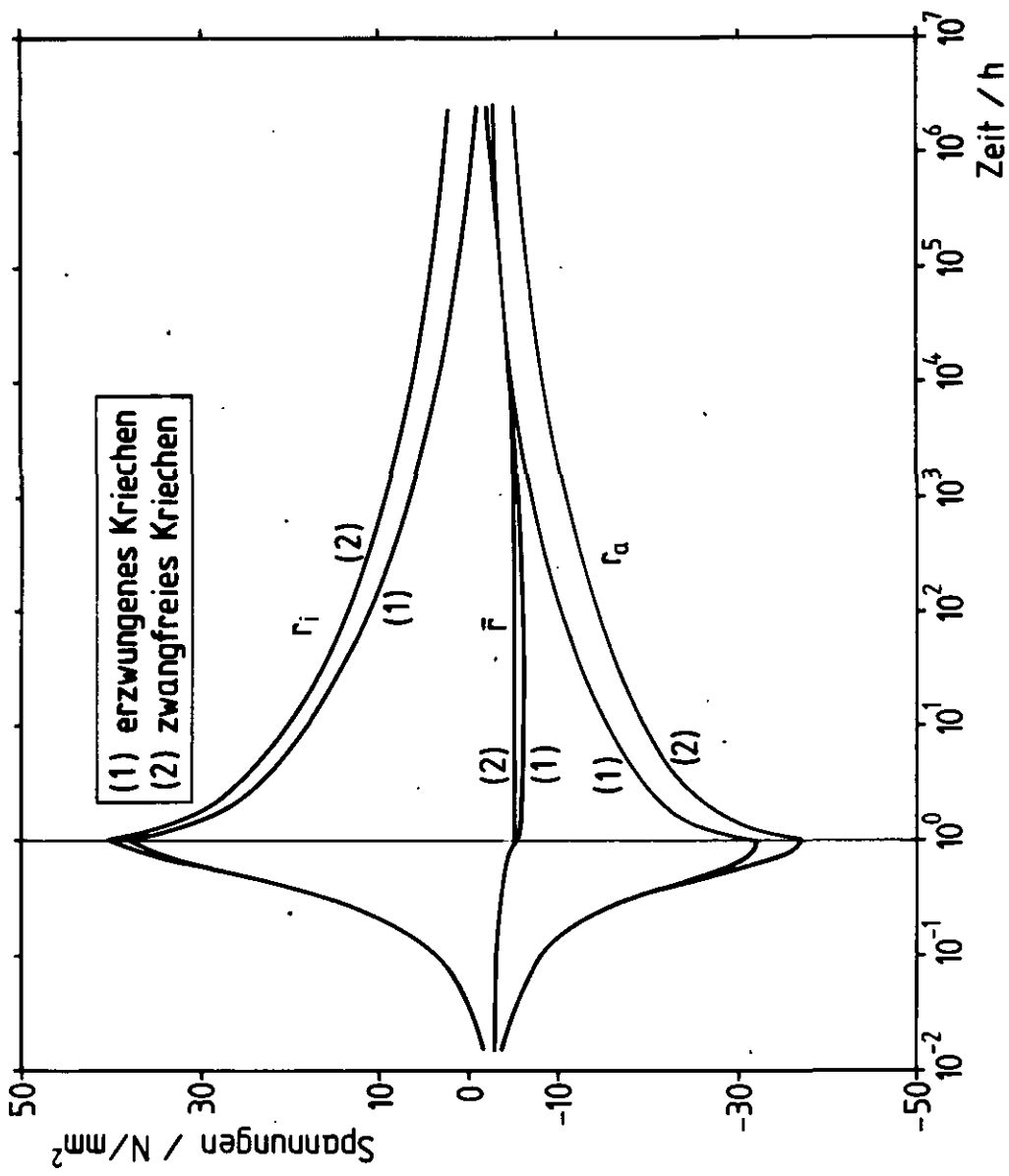


Abb.1.2: Verlauf der Azimuthalspannungen am Rohr für drei Aufpunkte (mit Radien $r = r_i$, r_a und $\bar{r} = (r_i + r_a) / 2$)

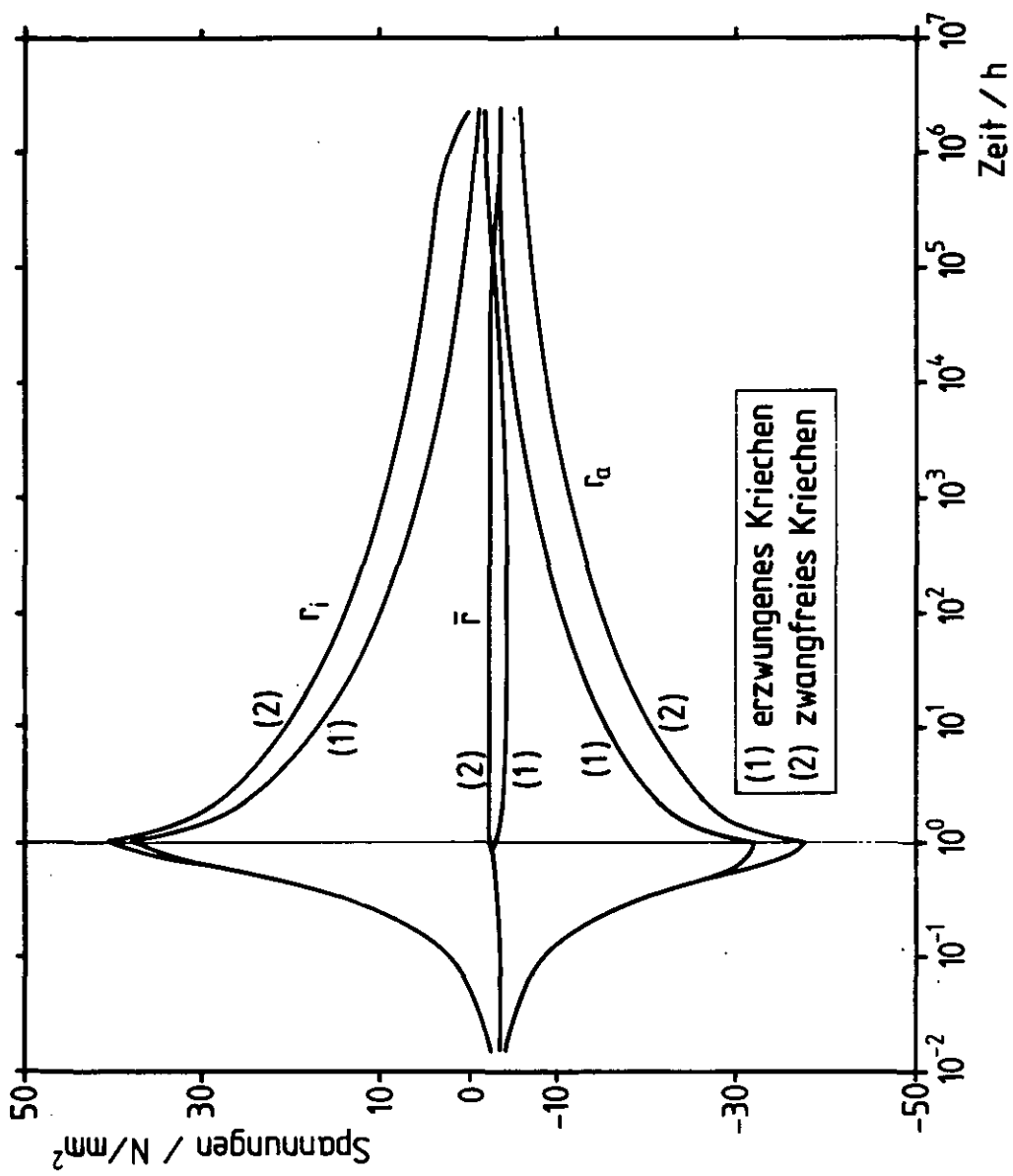


Abb.1.3 : Verlauf der Axialspannungen am Rohr für drei
 Aufpunkte (mit Radien $r=r_i$, r_a und $\bar{r}=(r_i+r_a)/2$)

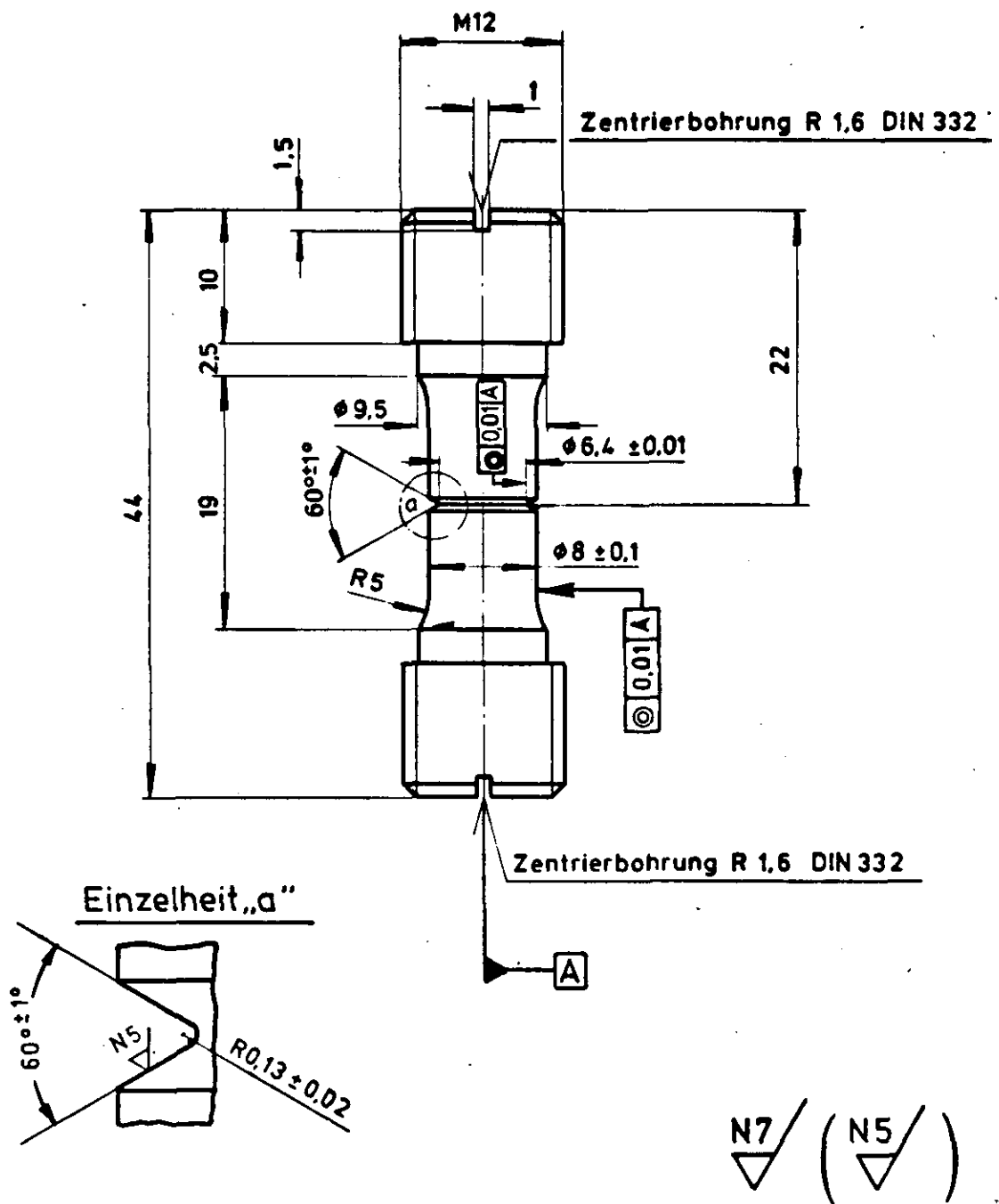


Abb. 2: Geometrische Abmessungen der Kerbzugprobe nach DIN 50118.
Maßstab: 2:1

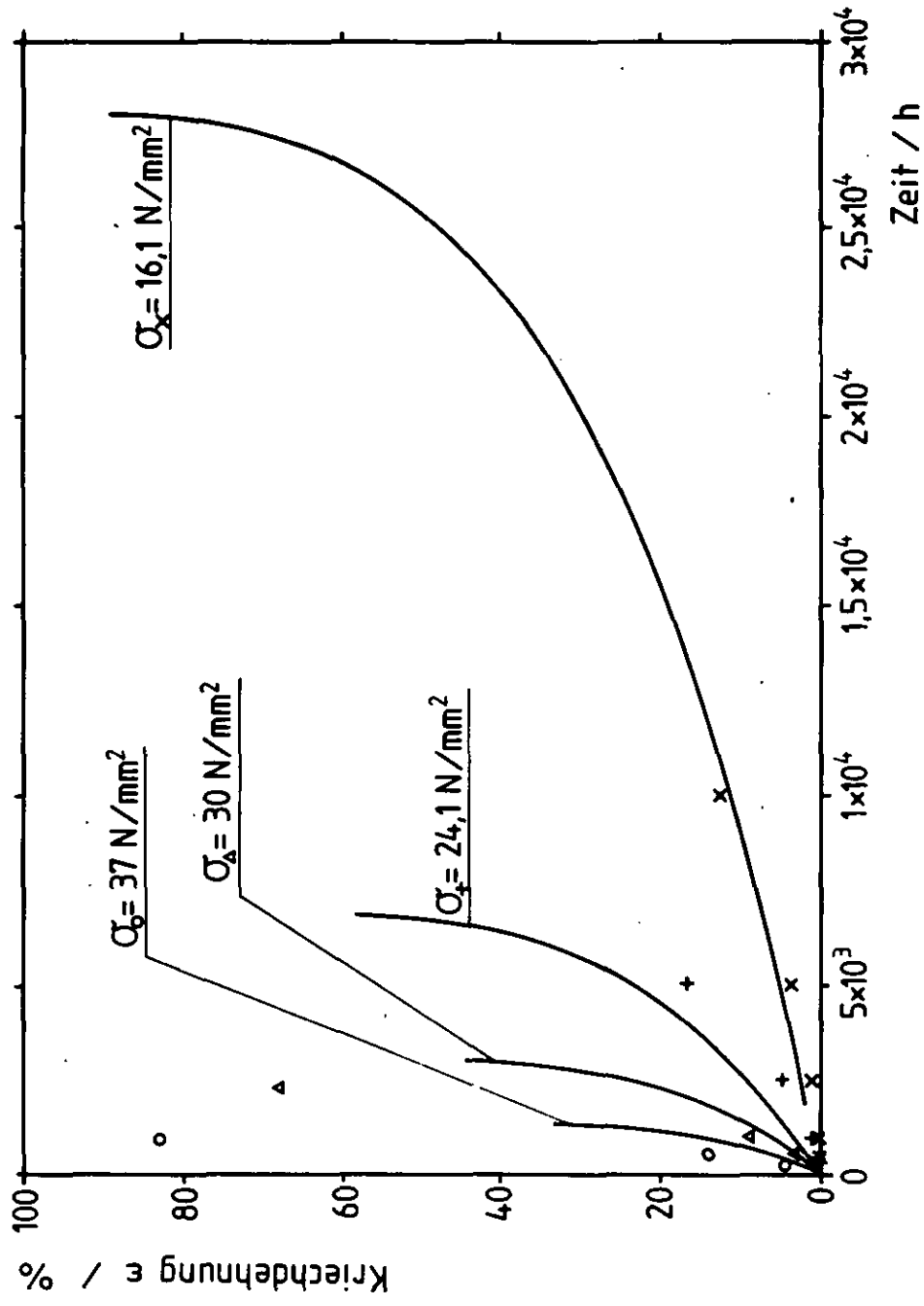


Abb.3: Zeitdehnlinien für Hastelloy X bei 1173 K

– Anpassung an Meßpunkte mittels Kachanow'scher Gleichungen –

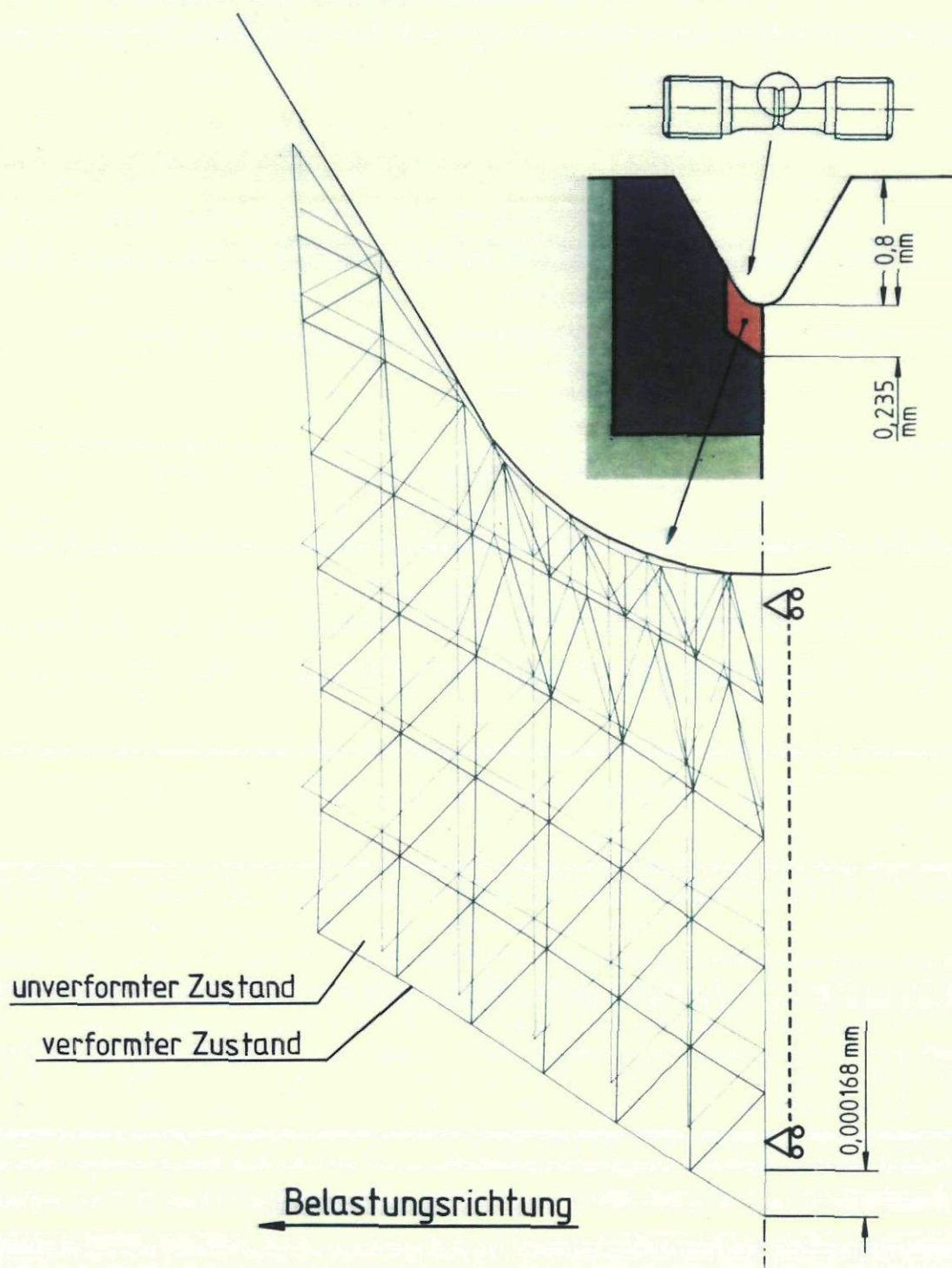


Abb.4: Kriechverzerrungen pro Zeiteinheit
im Bereich des Kerbgrunds

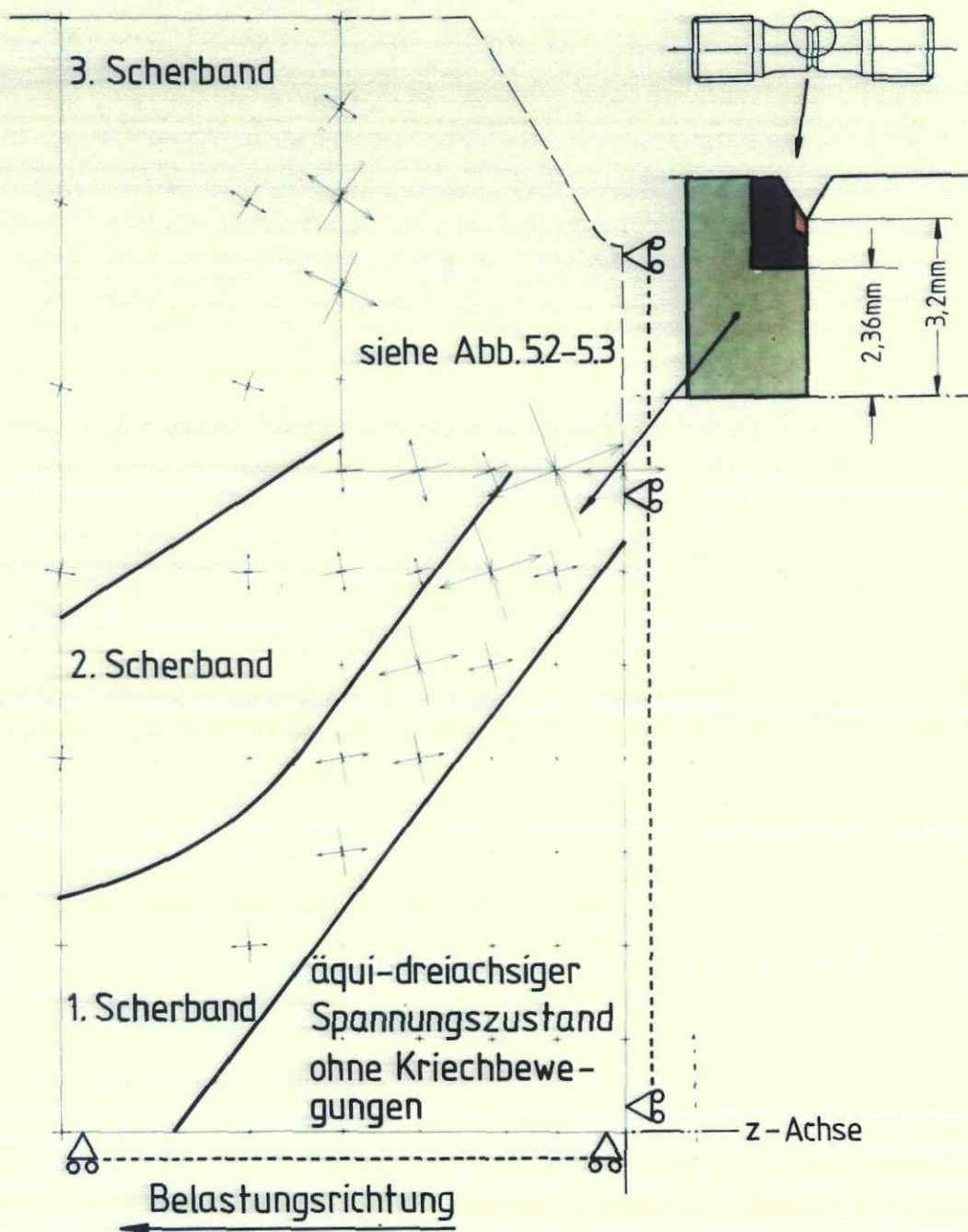


Abb. 5.1: Gesamtdehnratenverteilung $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}(t=0)$
im zentralen Bereich des Korbquerschnitts

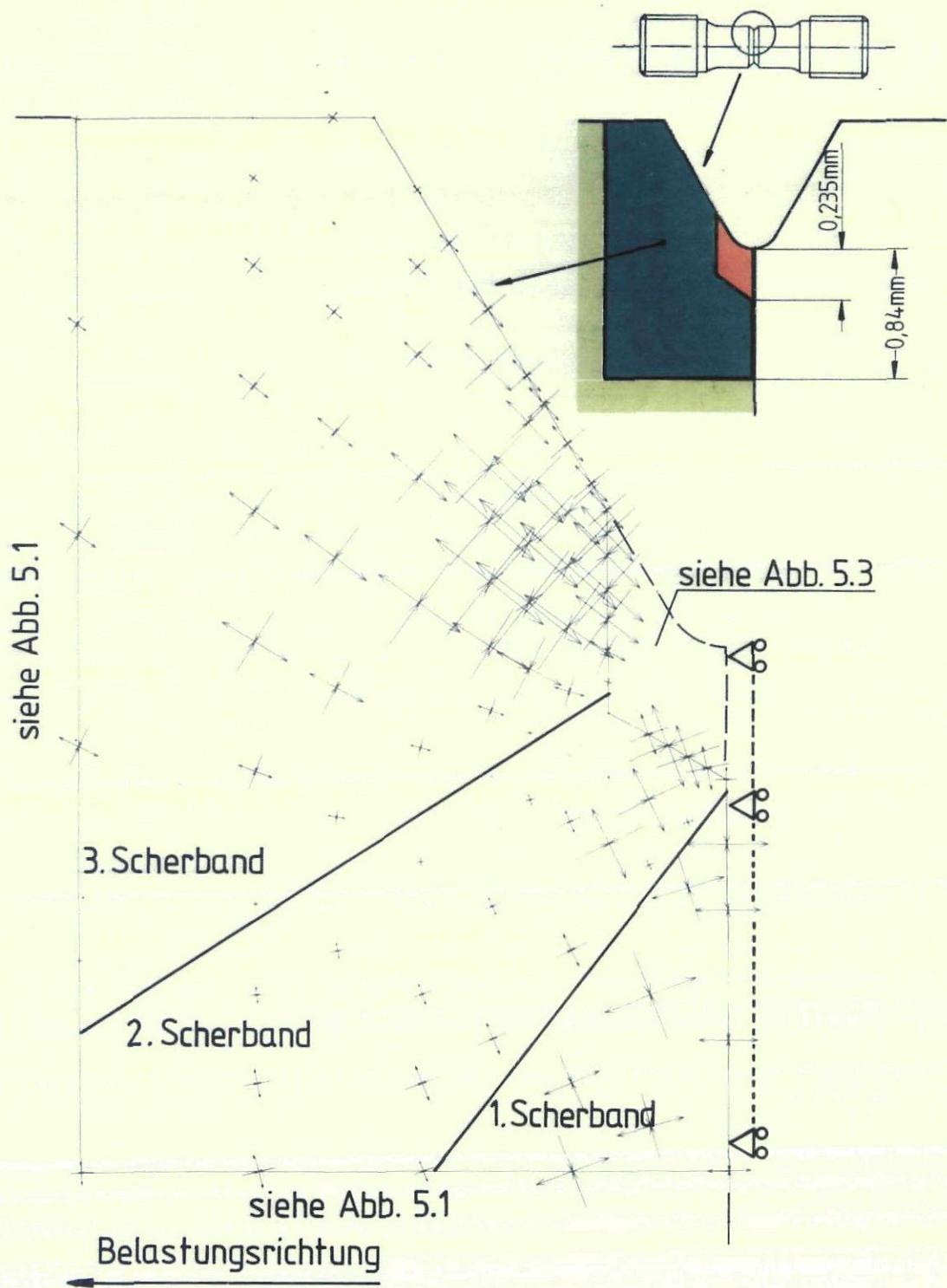


Abb. 5.2: Gesamtdehnrateverteilung $\dot{\epsilon}^{\text{tot}}$ ($t=0$)
im Bereich des Kerbquerschnitts
zwischen Kerbe und Fließkegel

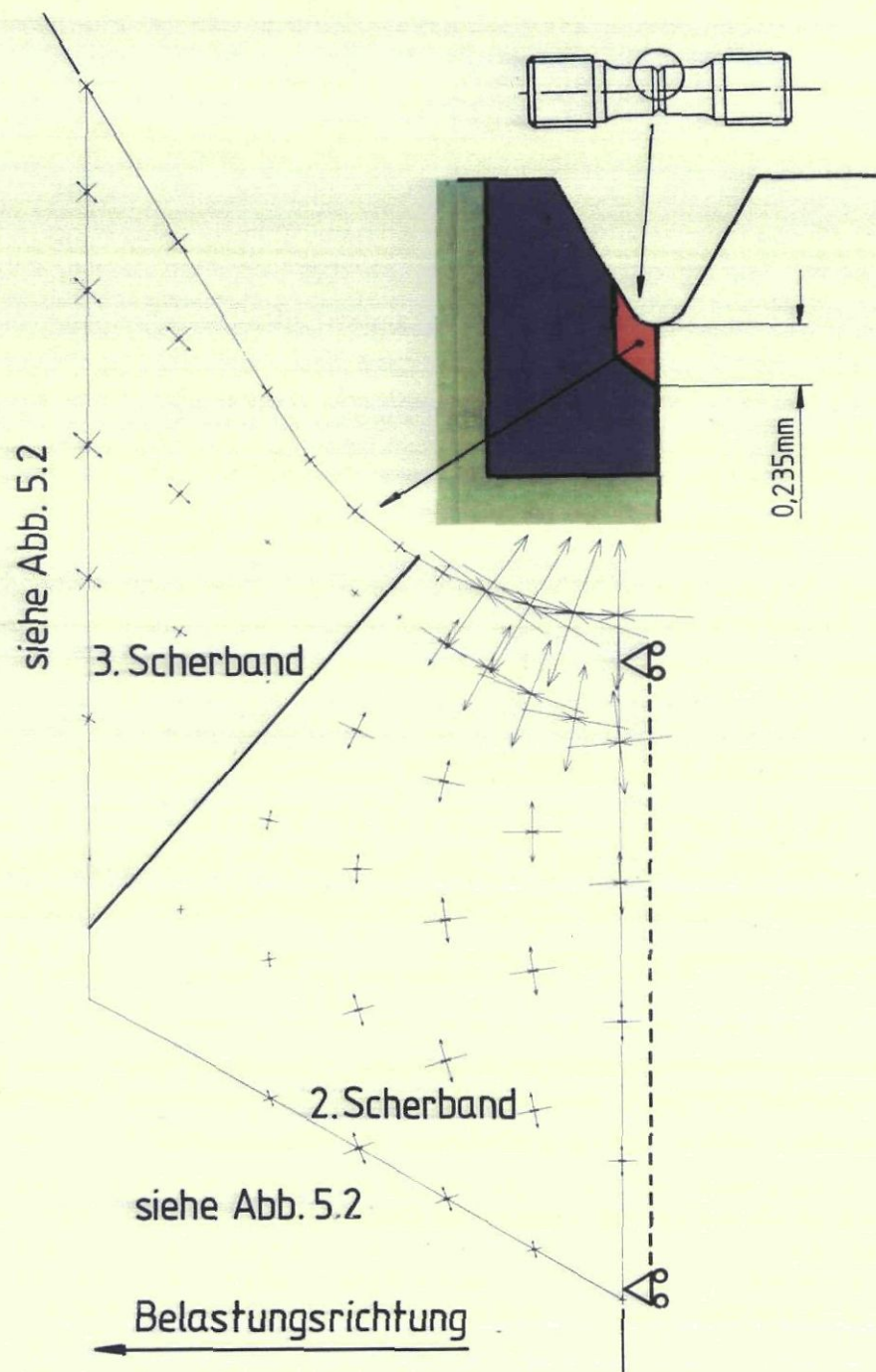


Abb.5.3: Gesamtdehnrateverteilung $\dot{\epsilon}^{tot}$ ($t=0$)
im Bereich des Kerbgrunds

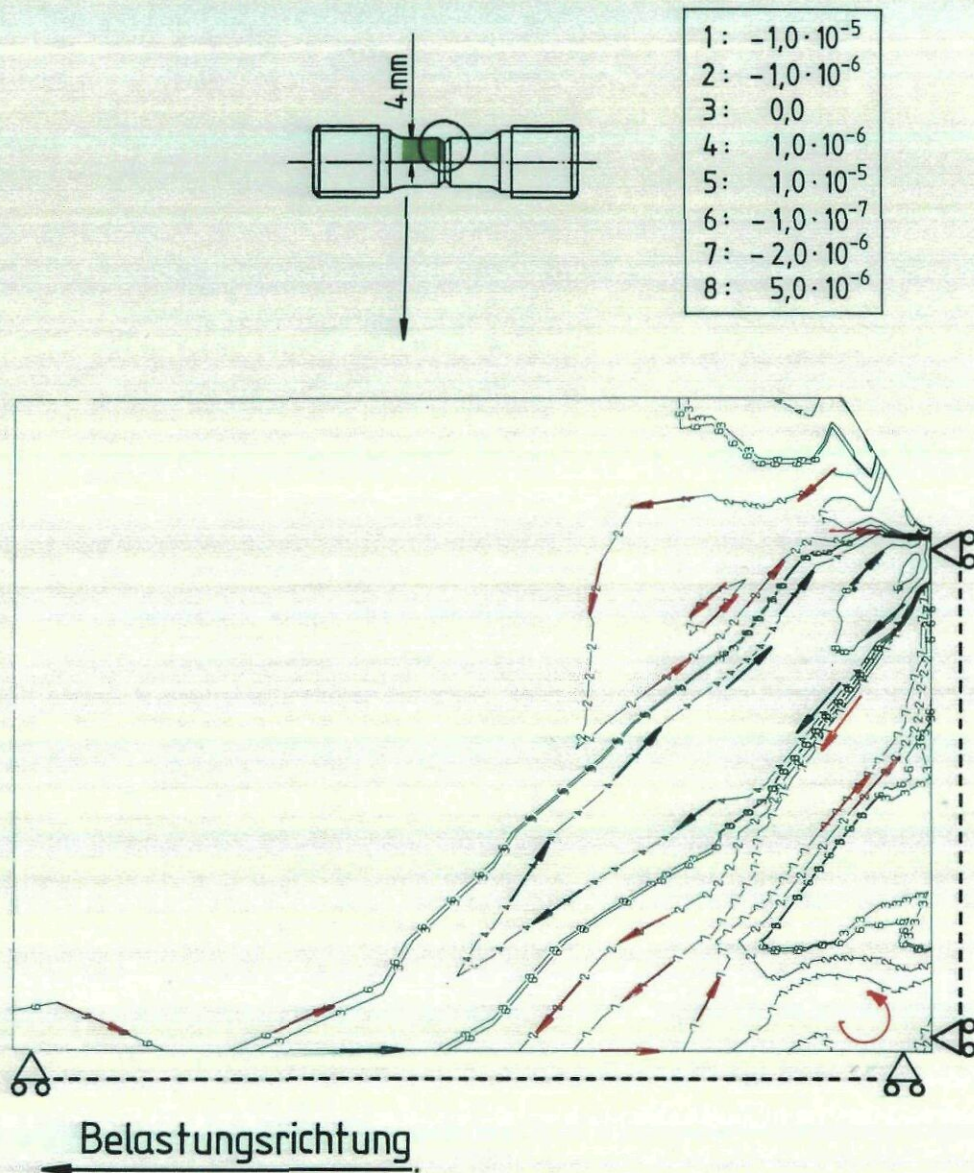


Abb.6.1: Rotation des Verschiebungsvektors basierend auf der Dehnratenverteilung nach Abb. 5

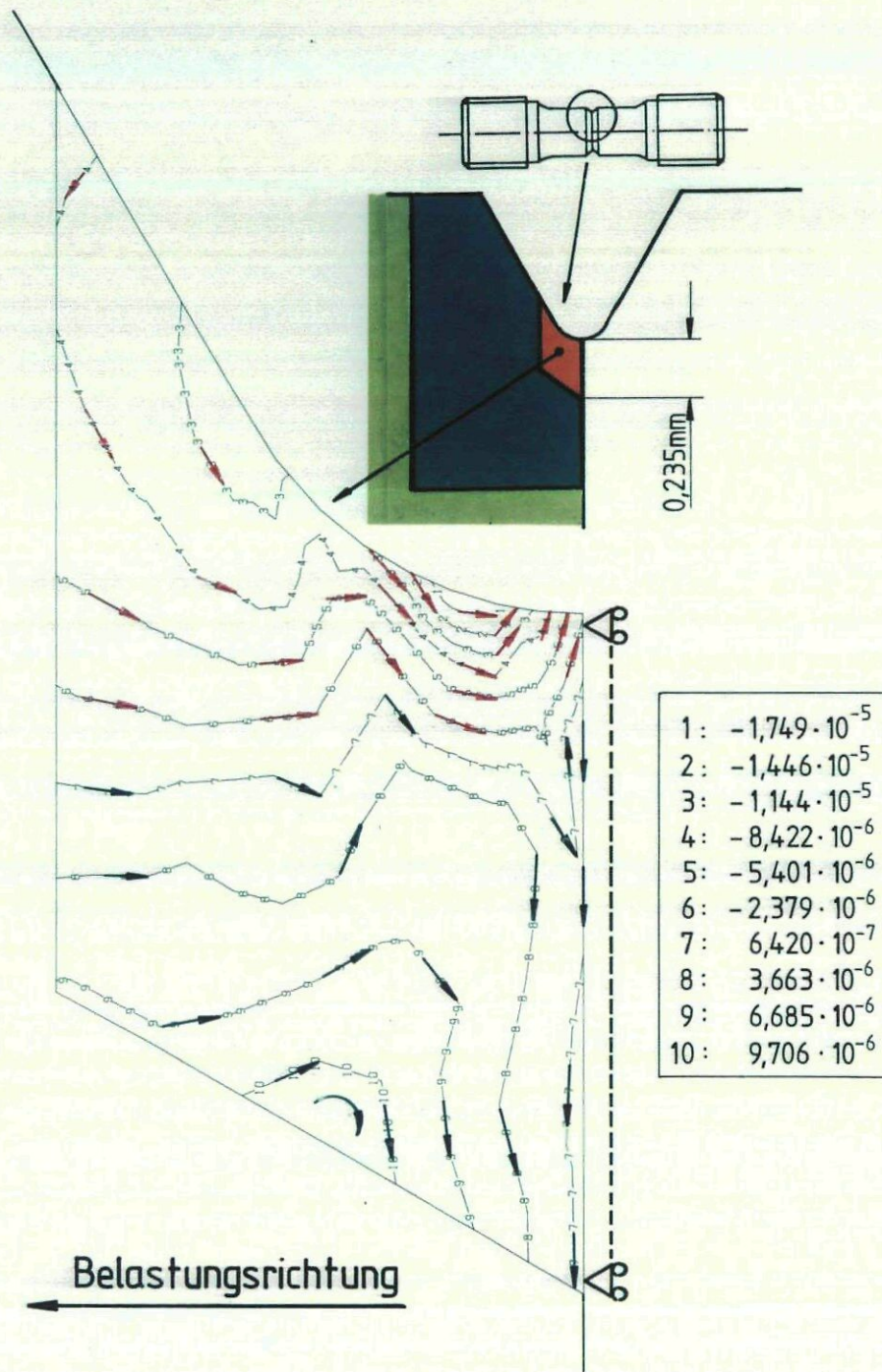


Abb.6.2: Ausschnittsvergrößerung der
Abb.6.1 am Kerbgrund

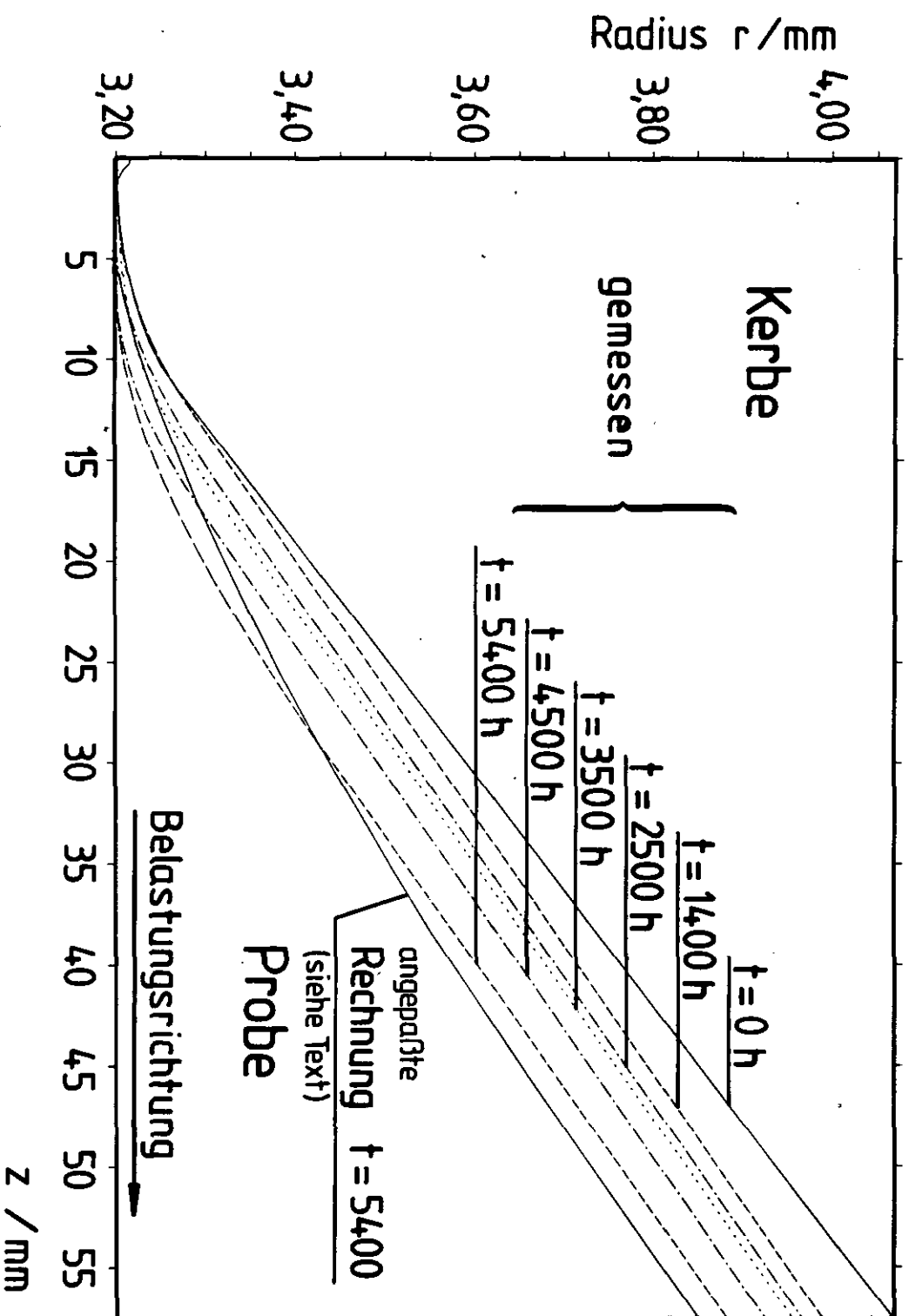


Abb. 7: Kontur einer Kerbflanke im zeitlichen Verlauf